Mathématiques pour économistes – Chapitre 2

Fonctions à une variable : fondements

Faïçal Lakhchen

Faculté d'Économie et de Gestion Nador, Université Mohammed Premier
https://faicallakhchen.github.io/ | f.lakhchen@ump.ac.ma

Octobre 2026

Où en sommes-nous ?

- Chap. 1 : Introduction
- **Chap. 2 : Fonctions à une variable : fondements**
- Chap. 3 : Fonctions à une variable : applications
- Chap. 4 : Dérivée d'une composée
- Chap. 5 : Exponentielles et logarithmes
- Chap. 6 : Introduction à l'algèbre linéaire
- Chap. 7 : Systèmes d'équations linéaires
- Chap. 8 : Algèbre matricielle
- Chap. 9 : Déterminants : approche élémentaire
- Chap. 10 : Espaces euclidiens
- Chap. 11 : Indépendance linéaire
- Chap. 12 : Limites et ensembles ouverts
- Chap. 13 : Fonctions de plusieurs variables
- Chap. 14 : Calcul différentiel à plusieurs variables
- Chap. 15 : Fonctions implicites et leurs dérivées
- Chap. 16 : Formes quadratiques et matrices définies
- Chap. 17 : Optimisation sans contrainte
- Chap. 18 : Optimisation sous contrainte I
- Chap. 19 : Optimisation sous contrainte II
- Chap. 20 : Fonctions homogènes et homothétiques
- Chap. 21 : Fonctions concaves et quasi-concaves
- Chap. 22 : Applications économiques de l'optimisation
- Chap. 23 : Valeurs propres et vecteurs propres
- Chap. 24 : Équations différentielles scalaires
- Chap. 25 : Systèmes d'équations différentielles
- Chap. 26 : Déterminants : les détails
- Chap. 27 : Sous-espaces associés à une matrice
- Chap. 28 : Applications de l'indépendance linéaire
- Chap. 29 : Limites et ensembles compacts
- Chap. 30 : Calcul à plusieurs variables II

Plan du chapitre

Fonctions sur $\mathbb{R}$

Fonctions linéaires

Pente d'une fonction non linéaire

Calcul des dérivées

Dérivabilité et continuité

Dérivées d'ordre supérieur

Approximation par la différentielle

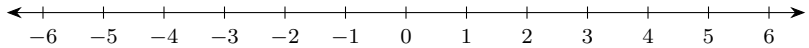
Exercices corrigés

Objectif du chapitre

- La théorie économique cherche à exprimer et à comprendre les relations entre variables économiques : on les décrit par des **fonctions**. L'effet d'une variable (les dépenses publiques) sur une autre (le PNB) conduit à l'étude des fonctions d'une seule variable.
- L'information essentielle est la façon dont la variation d'une variable affecte l'autre :
  - une hausse de la masse monétaire fait-elle baisser les taux d'intérêt ?
  - une hausse d'un million des dépenses publiques augmente-t-elle ou diminue-t-elle la production totale ? de combien ?
- Pour une fonction **linéaire**, cet effet est mesuré par la **pente** ; pour une fonction **non linéaire**, par la **dérivée**, qui généralise la pente.
- Ce chapitre définit la dérivée, apprend à la calculer et montre son rôle dans la mesure des relations entre variables.

Vocabulaire des fonctions

- La **droite réelle** est une droite infinie dans les deux sens, avec une **origine** (le nombre 0) et une unité de longueur : chaque réel est représenté par un unique point, et chaque point représente un unique réel. On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels.
- Une **fonction** est une règle qui associe à chaque nombre de $\mathbb{R}$ un nombre de $\mathbb{R}$. Exemples : $f(x) = x + 1$, avec $f(2) = 3$ et $f(-3/2) = -1/2$; $g(x) = 2x$, avec $g(4) = 8$ et $g(-3) = -6$.
- Dans $y = f(x)$:
  - x (l'entrée) est la **variable indépendante**, ou **variable exogène** en économie ;
  - y (la sortie) est la **variable dépendante**, ou **variable endogène**.



La droite réelle $\mathbb{R}$ (fig. 2.1)

Polynômes et autres fonctions usuelles

- **Monôme** : $f(x) = ax^k$, k entier positif (**degré**), a réel (**coefficient**). Exemples :

$$f_1(x) = 3x^4, \qquad f_2(x) = -x^7, \qquad f_3(x) = -10x^2. \tag{1}$$

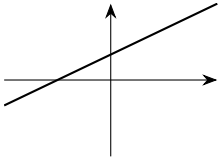
- **Polynôme** : somme de monômes, écrits par degrés décroissants, par exemple $h(x) = -x^7 + 3x^4 - 10x^2$. Son **degré** est le plus haut degré de ses monômes (ici 7).
- **Fonctions rationnelles** : quotients de polynômes,

$$y = \frac{x^2+1}{x-1}, \qquad y = \frac{x^5+7x}{5}, \qquad y = \frac{x-1}{x^3+3x+2}, \qquad y = \frac{x^2-1}{x^2+1}. \tag{2}$$

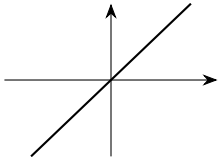
- **Fonctions exponentielles** ($y = 10^x$), **trigonométriques** ($y = \sin x$, $y = \cos x$), etc.
- Le **graphe** d'une fonction est l'ensemble des points (x, y) du plan tels que $y = f(x)$: il contient en général l'information essentielle sur la fonction.

Graphes de quelques fonctions

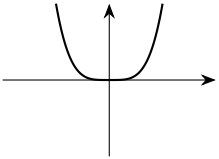
$f(x) = x + 1$



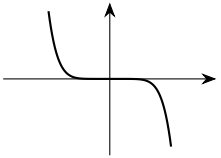
$g(x) = 2x$



$f_1(x) = 3x^4$



$f_2(x) = -x^7$



$f_3(x) = -10x^2$

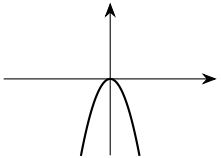


Figure 2.2

Fonctions croissantes et décroissantes

Définition

f est **croissante** si son graphe monte de gauche à droite :

$$x_1 > x_2 \implies f(x_1) > f(x_2);$$

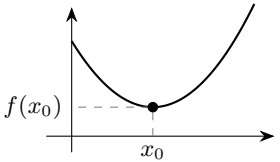
f est **décroissante** si son graphe descend de gauche à droite :

$$x_1 > x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

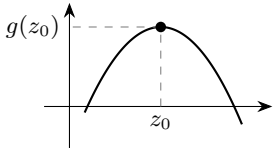
- Dans la figure 2.2, $f(x) = x + 1$ et $g(x) = 2x$ sont croissantes ; $f_2(x) = -x^7$ est décroissante.
- Les points où une fonction passe de croissante à décroissante (ou l'inverse) sont particulièrement importants : ce sont des **extremums**.

Minimums et maximums locaux et globaux

- Si f passe de décroissante à croissante en x_0, son graphe « remonte » autour de $(x_0, f(x_0))$: c'est un **minimum local** (ou relatif). Si $f(x) \geq f(x_0)$ pour *tout* x, c'est un **minimum global** (ou absolu).
- Si g passe de croissante à décroissante en z_0, son graphe « redescend » : $(z_0, g(z_0))$ est un **maximum local**, c'est-à-dire $g(x) \leq g(z_0)$ pour x proche de z_0. Si $g(x) \leq g(z_0)$ pour *tout* x, c'est un **maximum global** (ou absolu).
- $(0, 0)$ est un minimum global de $f_1(x) = 3x^4$ et un maximum local et global de $f_3(x) = -10x^2$.



f a un minimum en x_0 (fig. 2.3)



g a un maximum en z_0 (fig. 2.4)

Domaine

- Certaines fonctions ne sont définies que sur une partie de $\mathbb{R}$. L'ensemble des x pour lesquels $f(x)$ est défini est le **domaine** de f. Les cinq fonctions de la figure 2.2 ont pour domaine $\mathbb{R}$; $f(x) = 1/x$ a pour domaine $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Restrictions **mathématiques** : on ne peut pas diviser par zéro, ni prendre la racine carrée (ou le logarithme) d'un nombre négatif. Ainsi $h_1(x) = 1/(x^2 - 1)$ a pour domaine $\mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$ et $h_2(x) = \sqrt{x - 7}$ a pour domaine $\{x \geq 7\}$.
- Restrictions liées à l'**application** : si $C(x)$ est le coût de production de x voitures, x est un entier positif ; si $F(x)$ est le coût de x *tonnes* de voitures, le domaine naturel est la demi-droite

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\},$$

domaine fréquent des fonctions des applications.

Notation

Si le domaine de $y = f(x)$ est l'ensemble $D \subset \mathbb{R}$, on écrit $f : D \to \mathbb{R}$.

Intervalles

Pour deux réels $a < b$, l'ensemble des nombres compris entre a et b est un **intervalle**.

- **ouvert** (bornes exclues) :

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\};$$

- **fermé** (bornes incluses) :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\};$$

- **semi-ouvert** (ou semi-fermé) : $]a, b]$ ou $[a, b[$.

Cinq types d'**intervalles infinis** :

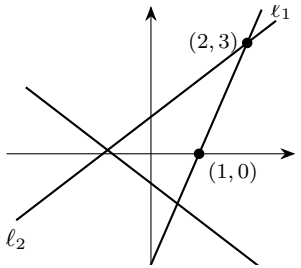
$$\begin{aligned}]a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \\ [a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \\ ]-\infty, a[&= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \\ ]-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, \\ ]-\infty, +\infty[&= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Remarque

Le livre utilise la notation anglo-saxonne : (a, b) pour $]a, b[$, $(a, b]$ pour $]a, b]$, (a, ∞) pour $]a, +\infty[$, etc.

Pente d'une droite

- Les polynômes de degré 0, $f(x) = b$ (constantes), sont trop simples. Les fonctions les plus simples « intéressantes » sont les polynômes de degré 1 : $f(x) = mx + b$, dites **linéaires** car leur graphe est une droite.
- La **pente** d'une droite mesure son inclinaison : partant d'un point (x_0, y_0) de la droite, on augmente x d'*une unité* ; la variation de y est la pente.



Quelques pentes dans le plan (fig. 2.5)

Exemple (2.1)

De $(1,0)$ à $(2,3)$ sur ℓ_1, y augmente de 3 : la pente de ℓ_1 est 3. La diagonale ℓ_2 (angle de $45°$) a pour pente $+1$; ℓ_3 (angle de $-45°$) a pour pente -1. Les droites plus raides que ℓ_2 ont une pente entre 1 et $+\infty$; les droites montantes moins raides, entre 0 et 1. Les droites horizontales ont une pente nulle ; les droites descendantes, une pente négative.

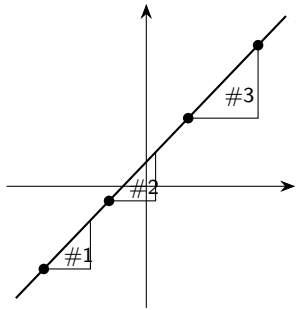
La pente ne dépend pas du point de départ

- Partant de (x_1, y_1) et allant à $(x_1 + 1, y_1')$, la pente est $y_1' - y_1$ (triangle #1). Partant de (x_2, y_2), elle est $y_2' - y_2$ (triangle #2).
- Les côtés des triangles #1 et #2 sont parallèles : les triangles sont **semblables**, donc

$$\frac{y_2' - y_2}{1} = \frac{y_1' - y_1}{1}.$$

- Le triangle #3, de (x_3, y_3) à (x_4, y_4) (avec $x_4 \neq x_3 + 1$ en général), est aussi semblable :

$$\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{y_2' - y_2}{1} = \frac{y_1' - y_1}{1} = \text{pente de } \ell.$$



Calcul de la pente de ℓ de trois façons (fig. 2.6)

Définition générale de la pente

Définition

Soient (x_0, y_0) et (x_1, y_1) deux points quelconques d'une droite ℓ. Le rapport

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

est la **pente** de ℓ. D'après la figure 2.6, il ne dépend pas des deux points choisis sur ℓ.

- Le même raisonnement montre que deux droites sont **parallèles** si et seulement si elles ont la même pente.

Exemple (2.2)

La pente de la droite passant par $(4, 6)$ et $(0, 7)$ est $m = \frac{7-6}{0-4} = -\frac{1}{4}$: elle descend en faisant un petit angle avec l'horizontale. La droite passant par $(4, 0)$ et $(0, 1)$ a aussi pour pente $-1/4$: ces deux droites sont parallèles.

Équation d'une droite

- Soit ℓ de pente m coupant l'axe des ordonnées en $(0, b)$ (l'**ordonnée à l'origine**). Pour un point (x, y) de ℓ, $\dfrac{y-b}{x-0} = m$, soit $y = mx + b$.

Théorème (2.1)

La droite de pente m et d'ordonnée à l'origine $(0, b)$ a pour équation $y = mx + b$.

- **Les polynômes de degré 1 ont pour graphe une droite** : pour deux points (x_1, y_1), (x_2, y_2) du graphe de $f(x) = mx + b$,

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(mx_2 + b) - (mx_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{m(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = m,$$

pente constante : c'est une droite, d'ordonnée à l'origine b.

- Droite de pente m passant par (x_0, y_0) : $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = m$, soit

$$y = m(x - x_0) + y_0. \tag{3}$$

- Droite passant par (x_0, y_0) et (x_1, y_1) : on calcule $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, puis on applique (3).

Exemple 2.3 : degrés Celsius et Fahrenheit

Exemple (2.3)

Soit x la température en degrés Celsius et y en degrés Fahrenheit. On sait que x et y sont liés linéairement, que $0°\text{C} = 32°\text{F}$ (congélation de l'eau) et $100°\text{C} = 212°\text{F}$ (ébullition). Trouver la relation entre x et y.

- On cherche la droite passant par $(0, 32)$ et $(100, 212)$. Sa pente est

$$\frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5} :$$

une hausse de $1°\text{C}$ correspond à une hausse de $\frac{9}{5}\,°\text{F}$.

- Avec la pente $\frac{9}{5}$ et le point $(0, 32)$:

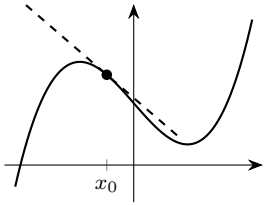
$$\frac{y - 32}{x - 0} = \frac{9}{5} \qquad \text{soit} \qquad y = \frac{9}{5}\,x + 32.$$

Interprétation de la pente : effets marginaux

- La pente d'une fonction linéaire f mesure de combien $f(x)$ augmente quand x augmente d'une unité : c'est son **taux de variation**, le même en tout point.
- Si $f(x)$ est la distance (en km) parcourue en x heures, la pente est le nombre de kilomètres parcourus *chaque* heure : la **vitesse**.
- Ce point de vue joue un rôle clé en économie :
  - coût linéaire $C = F(q)$: la pente est le coût de production d'une unité supplémentaire, le **coût marginal** ; il joue un rôle central dans le comportement des entreprises qui maximisent leur profit ;
  - utilité linéaire $u = U(x)$ d'un revenu x : la pente est l'utilité apportée par chaque euro supplémentaire, l'**utilité marginale du revenu** ;
  - production $y = G(z)$ avec z unités de travail : la pente est la **productivité marginale du travail**.
- Les règles qui décrivent le comportement des consommateurs et des entreprises font intervenir ces grandeurs **marginales** : on décide selon l'effet de la *prochaine* unité consommée ou produite, non selon le total déjà atteint.

Tangente et dérivée

- Presque toutes les fonctions des applications sont non linéaires : comment mesurer leurs effets marginaux ?
- Pour mesurer le taux de variation de f en x_0, on trace la **tangente** au graphe en $(x_0, f(x_0))$: au voisinage de ce point, elle approche très bien le graphe. Sa pente, que l'on sait mesurer, est une bonne mesure de la pente de f en x_0. Contrairement au cas linéaire, elle varie d'un point à l'autre.
- Analogie : un promoteur ou un agriculteur qui travaille sur un grand terrain le suppose *plan*, alors qu'il est sur une planète *ronde* : il utilise le plan tangent à la Terre, et ses calculs restent exacts à 10 ou 20 décimales près.



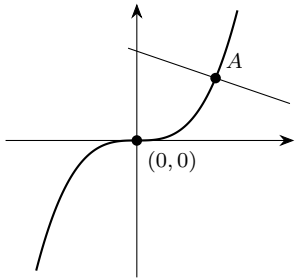
Le graphe d'une fonction non linéaire (fig. 2.8)

Définition

La pente de f en x_0 est la pente de la tangente au graphe en $(x_0, f(x_0))$: c'est la **dérivée** de f en x_0, notée $f'(x_0)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ (variation de f divisée par celle de x, $\Delta f/\Delta x$).

Qu'est-ce qu'une tangente ?

- Il faut une définition analytique de la dérivée, donc d'abord une définition précise de la tangente.
- « La droite qui ne rencontre le graphe qu'en un point » ne convient pas : la droite passant par A (figure) ne rencontre le graphe de x^3 qu'en un point et n'est pas tangente.
- « La droite qui rencontre le graphe en un point sans le traverser » ne convient pas non plus : l'axe des x est la tangente au graphe de $y = x^3$ en $(0, 0)$, et il **traverse** le graphe.
- Il faut être plus subtil : la seule façon de procéder est un **passage à la limite**.



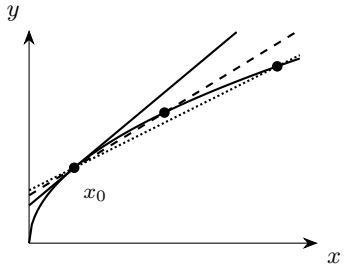
Une tangente (l'axe des x) et une droite non tangente au graphe de x^3 (fig. 2.9)

Sécantes et définition de la dérivée

- Un segment joignant deux points du graphe est une **sécante**. On trace la sécante ℓ_1 joignant $(x_0, f(x_0))$ à $(x_0 + h_1, f(x_0 + h_1))$, avec h_1 petit : c'est une approximation de la tangente.
- On choisit h_2 plus proche de 0, puis $h_3 \ldots$: une suite (h_n) qui tend vers 0. Les sécantes ℓ_n approchent la tangente, et leurs pentes

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{(x_0 + h_n) - x_0} = \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}$$

approchent la pente de la tangente.



Approximation de la tangente par une suite de sécantes (fig. 2.10)

Définition analytique de la dérivée

- La sécante ℓ_n passe par $(x_0, f(x_0))$ et $(x_0 + h_n, f(x_0 + h_n))$; sa pente est $\dfrac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}$.
- La pente de la tangente est la **limite** de ces pentes quand h_n tend vers 0.

Définition

La **dérivée** de f en x_0, notée $f'(x_0)$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ ou $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0)$, est la pente de la tangente au graphe en $(x_0, f(x_0))$. Analytiquement,

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{4}$$

si cette limite existe ; on dit alors que f est **dérivable** en x_0.

Exemple 2.4 : dérivée de x^2 en $x_0 = 3$

On utilise (4) avec la suite

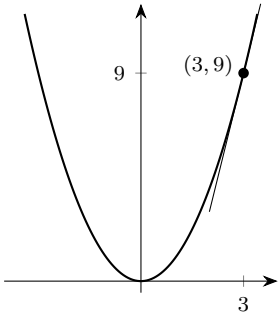
$$(h_n) = 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ \ldots;\ (0{,}1)^n;\ \ldots \quad (5)$$

Le graphe est assez raide en $(3, 9)$: on s'attend à $f'(3)$ nettement supérieur à 1.

h_n	$x_0 + h_n$	$f(x_0 + h_n)$	$\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}$
0,1	3,1	9,61	6,1
0,01	3,01	9,0601	6,01
0,001	3,001	9,006001	6,001
0,0001	3,0001	9,00060001	6,0001

Tableau 2.1

Le quotient tend vers 6 : la pente de la tangente en $(3, 9)$ est $f'(3) = 6$.



Tangente au graphe de $f(x) = x^2$ en $x_0 = 3$

(fig. 2.11)

Exemple 2.5 : preuve que $f'(3) = 6$

Exemple (2.5)

Pour prouver que $f'(3) = 6$, il faut montrer que

$$\frac{(3+h_n)^2 - 3^2}{h_n} \to 6 \quad \text{quand } h_n \to 0 \tag{6}$$

pour *toute* suite (h_n) tendant vers 0, pas seulement pour la suite (5). Or, pour tout $h \neq 0$,

$$\frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \frac{h(6+h)}{h} = 6 + h \xrightarrow[h \to 0]{} 6.$$

On sait maintenant avec certitude que $f'(3) = 6$.

Exemple 2.6 ; théorème 2.2

Exemple (2.6)

En un point x_0 quelconque, pour toute suite $h_n \to 0$:

$$\frac{(x_0+h_n)^2 - x_0^2}{h_n} = \frac{2h_n x_0 + h_n^2}{h_n} = 2x_0 + h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2x_0.$$

Théorème (2.2)

La dérivée de $f(x) = x^2$ en x_0 est $f'(x_0) = 2x_0$.

Dérivée de x^k

- Avec l'exercice 2.10 : la dérivée de x^k est kx^{k-1} pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$. On le prouve pour tout entier $k \geq 1$ (et, plus loin, pour tout réel k).

Lemme (2.1, formule du binôme)

Pour tout entier $k \geq 1$,

$$(x+h)^k = x^k + a_1 x^{k-1} h + \cdots + a_{k-1} x h^{k-1} + a_k h^k, \qquad a_j = \frac{k!}{j!\,(k-j)!}, \tag{7}$$

avec en particulier $a_1 = k$, $a_2 = k(k-1)/2$ et $a_k = 1$.

Théorème (2.3)

Pour tout entier $k \geq 1$, la dérivée de $f(x) = x^k$ en x_0 est $f'(x_0) = kx_0^{k-1}$.

Preuve :

$$\frac{(x_0+h)^k - x_0^k}{h} = \frac{h\big(kx_0^{k-1} + \frac{1}{2}k(k-1)x_0^{k-2}h + \cdots + a_k h^{k-1}\big)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} kx_0^{k-1}. \qquad \blacksquare$$

Opérations sur les fonctions

- Les monômes x^k sont les briques de base d'une large classe de fonctions, dont les polynômes et les fonctions rationnelles.
- Pour dériver ces fonctions, il faut savoir dériver la somme, la différence, le produit et le quotient de deux fonctions dont on connaît les dérivées.
- On additionne, soustrait, multiplie et divise les fonctions **point par point**, en opérant sur leurs valeurs. Avec $f(x) = x^3$ et $g(x) = 6x^2$:

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &\equiv f(x) + g(x) = x^3 + 6x^2, \\
(f \cdot g)(x) &\equiv f(x) \cdot g(x) = x^3 \cdot 6x^2 = 6x^5, \\
\Big(\frac{f}{g}\Big)(x) &\equiv \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3}{6x^2} = \frac{1}{6}\,x.
\end{aligned}
$$

Règles de calcul des dérivées

Théorème (2.4)

Soit k une constante et f, g dérivables en x_0. Alors :

(a) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$, (b) $(kf)'(x_0) = k\, f'(x_0)$,

(c) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$, (d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$,

(e) $\big(f(x)^n\big)' = n\, f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$, (f) $(x^k)' = kx^{k-1}$.

- (c) : règle du **produit** ; (d) : règle du **quotient** ; (e) : règle de la **puissance**. La dérivée se comporte bien avec les sommes et différences ; les règles pour les produits et quotients sont plus compliquées.
- Preuves à partir de (4) : (a) et (b) en exercice (2.13) ; (f) pour k entier négatif en exercice (2.14), pour k fractionnaire en section 4.2.

Exemple 2.7

Exemple (2.7)

On utilise les théorèmes 2.3 et 2.4 :

$$
\begin{aligned}
(a)\quad & (x^7+3x^6-4x^2+5)' = 7x^6+18x^5-8x,\\
(b)\quad & \big((x^2+3x-1)(x^4-8x)\big)' = (2x+3)(x^4-8x)+(x^2+3x-1)(4x^3-8)\\
& \qquad = 6x^5+15x^4-4x^3-24x^2-48x+8,\\
(c)\quad & \Big(\frac{x^2-1}{x^2+1}\Big)' = \frac{(2x)(x^2+1)-(x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2},\\
(e)\quad & \big((x^3-4x^2+1)^5\big)' = 5(x^3-4x^2+1)^4\cdot(3x^2-8x),\\
(f)\quad & (3x^{2/3}+3x^{-1})' = 2x^{-1/3}-3x^{-2}.
\end{aligned}
$$

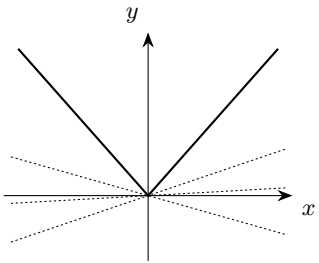
Fonctions dérivables ; une fonction non dérivable

- f est dérivable en x_0 si son graphe a une tangente en $(x_0, f(x_0))$, c'est-à-dire si la limite

$$\lim_{h_n \to 0} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} \qquad (8)$$

existe et est la même pour toute suite (h_n) tendant vers 0. f est **dérivable** si elle l'est en tout point de son domaine : son graphe est une courbe « lisse ».

- Le graphe de $|x|$ (fig. 2.12) a un **angle** en l'origine : une infinité de droites passent par $(0, 0)$ en restant d'un côté du graphe (fig. 2.13). Pas de tangente : $|x|$ n'est pas dérivable en 0.



Graphe de $|x|$ et candidates à la tangente (fig. 2.12 et 2.13)

$|x|$ n'est pas dérivable en 0 : preuve analytique

- Voyons pourquoi la définition (8) ne fonctionne pas pour $f(x) = |x|$ en 0. On y substitue deux suites qui tendent vers 0 :

$$(h_n) = +0{,}1;\ +0{,}01;\ +0{,}001;\ \ldots;\ +(0{,}1)^n;\ \ldots$$
$$(k_n) = -0{,}1;\ -0{,}01;\ -0{,}001;\ \ldots;\ -(0{,}1)^n;\ \ldots$$

- On calcule :

$$\frac{f(0+h_n)-f(0)}{h_n} = \frac{h_n - 0}{h_n} = +1, \qquad \frac{f(0+k_n)-f(0)}{k_n} = \frac{-k_n - 0}{k_n} = -1.$$

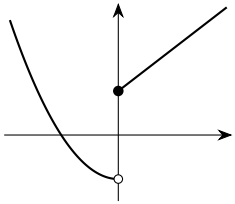
- La première suite de quotients $\{1, 1, \ldots\}$ tend vers $+1$; la seconde $\{-1, -1, \ldots\}$ tend vers -1.
- Deux suites tendant vers 0 donnent deux limites différentes dans (8) : la fonction $|x|$ **n'a pas de dérivée** en $x = 0$.

Fonctions continues

- Propriété plus fondamentale que la dérivabilité : géométriquement, f est **continue** si son graphe n'a pas de rupture. $|x|$ est continue, bien que non dérivable en 0.
- La fonction

$$g(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0, \\ x^2 - 1, & x < 0, \end{cases} \tag{9}$$

  n'est pas continue en 0 : $x = 0$ est une **discontinuité** de g.
- Le graphe d'une fonction ne peut pas avoir de tangente en un point de discontinuité : pour être dérivable, une fonction doit au moins être **continue**.
- Les discontinuités apparaissent quand une fonction est définie par des formules différentes sur différentes parties de la droite, qui ne donnent pas la même valeur au point de raccordement (ici $x = 0$).



La fonction g définie par (9) est discontinue en $x = 0$ (fig. 2.14)

Définition de la continuité

Définition

$f : D \to \mathbb{R}$ est **continue** en $x_0 \in D$ si, pour *toute* suite (x_n) de D qui converge vers x_0, $f(x_n)$ converge vers $f(x_0)$. f est continue sur $U \subset D$ si elle l'est en tout point de U ; elle est continue si elle l'est en tout point de son domaine.

- Motivation : $(-0{,}1)^n$ et $(+0{,}1)^n$ sont arbitrairement proches, mais $g((-0{,}1)^n)$ est proche de -1 et $g((+0{,}1)^n)$ de $+1$. Quand x traverse 0, g saute de deux unités : de petites variations de x n'entraînent pas de petites variations de $g(x)$.
- La fonction g définie par (9) ne vérifie donc pas cette définition en $x = 0$: $\lim_{n\to\infty} g((-0{,}1)^n) = -1$, mais $g(0) = +1$.

Continuité en économie ; fonctions C^1

- La plupart des théorèmes économiques supposent les fonctions continues, voire dérivables. Hypothèse raisonnable : pour une fonction de production, une petite variation de l'input donne une petite variation de l'output.
- Si f est dérivable, $x \mapsto f'(x)$ est une nouvelle fonction. Si f' est continue (la tangente varie continûment avec x), on dit que f est **continûment dérivable**, ou de classe C^1.

Exemple (2.8)

Tout polynôme est continu ; sa dérivée est un polynôme de degré inférieur d'une unité, donc continue : tout polynôme est C^1.

Dérivée seconde

- Si f est C^1 sur $\mathbb{R}$, sa dérivée $f'(x)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$; on peut se demander si f' a elle-même une dérivée en un point x_0.
- La dérivée de f' en x_0 est la **dérivée seconde** de f en x_0 ; on la note

$$f''(x_0) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Big)(x_0) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0).$$

Exemple (2.9)

La dérivée de $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ est la fonction $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$. Sa dérivée, la dérivée seconde de f, est $f''(x) = 6x + 6$.

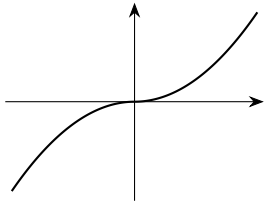
Une fonction C^1 sans dérivée seconde en 0

Exemple (2.10)

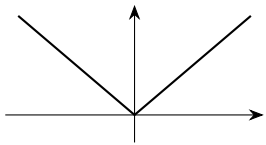
$$f(x) = \begin{cases} +\frac{1}{2}x^2, & x \geq 0, \\ -\frac{1}{2}x^2, & x < 0. \end{cases} \tag{10}$$

Les deux branches valent 0 en 0 : f est continue. De même $f'(x) = x$ pour $x \geq 0$ et $-x$ pour $x < 0$, soit $f'(x) = |x|$, est continue : f est C^1. Mais $f' = |x|$ n'est pas dérivable en 0 : $f''(0)$ n'existe pas (elle existe en tout autre point).

f définie par (10)



$f'(x) = |x|$



Classes C^2, C^k, C^∞

- Si f a une dérivée seconde en tout point, f'' est une fonction de x. Elle a une riche signification géométrique en termes de forme du graphe (chapitre 3). Si f'' est elle-même continue, on dit que f est **deux fois continûment dérivable**, ou C^2. Tout polynôme est C^2.
- Si f est C^2, on peut se demander si f'' est dérivable en x_0 ; on note cette dérivée

$$f'''(x_0), \qquad f^{[3]}(x_0) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(x_0).$$

  Pour le polynôme de l'exemple 2.9, $f'''(x) = 6$. Si f''' existe partout et est continue, f est C^3.
- Plus généralement, si f a des dérivées d'ordre $1, 2, \ldots, k$ et si la dérivée k-ième

$$f^{[k]}(x) = \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(x)$$

  est continue, f est de classe C^k. Si f est C^k pour tout entier k, elle est C^∞ (« indéfiniment dérivable »). Tous les polynômes sont C^∞.

Dérivée et variation marginale

- Pour une fonction linéaire $f(x) = mx + b$, la dérivée $f'(x) = m$ est la **variation marginale** de f : la hausse de f pour une hausse d'une unité de x. On étend cette analyse marginale aux fonctions non linéaires.
- La pente de la tangente est bien approchée par celle de la sécante : pour h petit,

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \approx f'(x_0). \tag{11}$$

Avec $h = 1$:

$$f(x_0 + 1) - f(x_0) \approx f'(x_0) : \tag{12}$$

la dérivée est une bonne approximation de la variation marginale ; elle est d'autant meilleure que le graphe est peu courbé en x_0.

Exemple (2.11)

Fonction de production $F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$; l'entreprise utilise $x = 100$ unités de travail et produit 5 unités. $F'(100) = \frac{1}{4} \cdot 100^{-1/2} = \frac{1}{40} = 0{,}025$ mesure la production *additionnelle* obtenue en embauchant une unité de travail de plus : la **productivité marginale du travail**. La hausse réelle est $F(101) - F(100) = 0{,}02494\ldots$, très proche.

Variation quelconque Δx

- Les économistes utilisent $F'(x)$ comme variation marginale même si ce n'est pas exactement la hausse de F pour une unité de plus : un seul terme est plus simple à manipuler qu'une différence, et on évite la question de l'unité de mesure de x.
- Si la variation de x n'est pas d'une unité : dans (11), on remplace h par la variation exacte Δx et on multiplie :

$$\Delta y \equiv f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\,\Delta x, \tag{13}$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x. \tag{14}$$

L'approximation est d'autant meilleure que le graphe est peu courbé et que Δx est petit.

Exemple (2.12)

Même fonction de production ; l'effectif passe de 900 à 896 : $x_0 = 900$, $\Delta x = -4$, $F'(x) = \frac{1}{4}x^{-1/2}$, $F'(900) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{120}$. Par (13), la production baisse d'environ $\frac{1}{120} \cdot 4 = \frac{1}{30}$; par (14), elle devient

$$F(900) + F'(900)(-4) = 15 - \frac{1}{30} = 14\tfrac{29}{30} = 14{,}9666\ldots$$

Valeur exacte : $F(896) = 14{,}9663\ldots$

Approximation de valeurs ; exemple 2.13

- Mathématiquement, (14) est un moyen efficace d'approcher $f(x)$ pour x proche d'un point x_0 où $f(x_0)$ et $f'(x_0)$ se calculent facilement. Dans l'exemple 2.12, on a calculé $\frac{1}{2}\sqrt{896}$ à partir de $\frac{1}{2}\sqrt{900} = 15$.

Exemple (2.13)

Estimer la racine cubique de $1001{,}5$. On sait que $\sqrt[3]{1000} = 10$. On prend $f(x) = x^{1/3}$, $x_0 = 1000$ et $\Delta x = +1{,}5$. Alors

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} \qquad \text{et} \qquad f'(1000) = \frac{1}{3}(1000)^{-2/3} = \frac{1}{300}.$$

Donc

$$f(1001{,}5) \approx f(1000) + f'(1000) \cdot 1{,}5 = 10 + \frac{1{,}5}{300} = 10{,}005,$$

proche de la vraie valeur $\sqrt[3]{1001{,}5} = 10{,}004998\ldots$

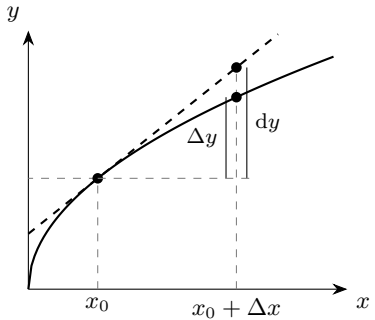
Différentielles

- (13) et (14) traduisent un fait géométrique : la tangente ℓ au graphe en $(x_0, f(x_0))$ approche bien le graphe pour x proche de x_0. Son équation est

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

- Les membres de gauche de (13)–(14) concernent le déplacement le long du **graphe** ; ceux de droite le déplacement le long de la **tangente**.
- Δy : variation le long du graphe ; $\mathrm{d}y$: variation le long de la tangente quand x varie de Δx :

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y = f'(x_0)\,\Delta x.$$



Comparaison de $\mathrm{d}y$ et Δy (fig. 2.15)

On écrit $\mathrm{d}x$ au lieu de Δx le long de la tangente (bien que $\Delta x = \mathrm{d}x$). Les accroissements $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ le long de ℓ sont les **différentielles** : $\mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$ ou $\mathrm{d}y = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$, ce qui justifie la notation $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ pour $f'(x)$.

Exercice 1 (S&B 2.1)

Exercice

Pour chaque fonction, tracer le graphe à l'aide de quelques points, puis dire a) où elle est croissante et décroissante ; b) quels sont ses maximums et minimums locaux et globaux : i) $3x - 2$; ii) $-2x$; iii) $x^2 + 1$; iv) $x^3 + x$; v) $x^3 - x$; vi) $|x|$.

Corrigé

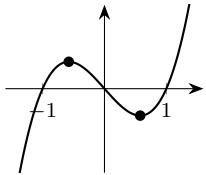
i) croissante ; ii) décroissante ; iv) croissante (somme de deux fonctions croissantes) : ni max ni min.

iii) décroissante sur $]-\infty, 0]$, croissante sur $[0, \infty[$: min global 1 en 0, pas de max.

v) $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ s'annule en $-1, 0, 1$. Croissante sur $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$ et $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty[$, décroissante entre : max local $\frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}385$ en $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, min local $-0{,}385$ en $\frac{1}{\sqrt{3}}$; pas d'extremum global.

vi) décroissante sur $]-\infty, 0]$, croissante sur $[0, \infty[$: min global 0 en 0, pas de max.

v) $x^3 - x$



Exercice 2 (S&B 2.2 et 2.6)

Exercice

En économie, il est naturel de supposer le coût total croissant en fonction de la production. Citer deux autres fonctions économiques naturellement croissantes, deux naturellement décroissantes et une qui passe de croissante à décroissante. Quel est leur domaine naturel ?

Corrigé

- **Croissantes** : la fonction de production (output en fonction de l'input) ; la fonction d'utilité du revenu ; la consommation en fonction du revenu.
- **Décroissantes** : la demande d'un bien en fonction de son prix ; le coût moyen de production pour de petites quantités (coûts fixes répartis).
- **Croissante puis décroissante** : le profit en fonction de la quantité produite ; la recette $p \cdot D(p)$ en fonction du prix.
- Domaine naturel : les quantités, prix et revenus sont positifs, d'où le domaine $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ (ou $]0, +\infty[$ pour le coût moyen).

Exercice 3 (S&B 2.3, 2.4 et 2.5)

Exercice

1. Le degré d'une fonction rationnelle est le degré du numérateur moins celui du dénominateur. Degré et domaine des fonctions rationnelles de (2) ?
2. Domaine de : a) $\frac{1}{x-1}$; b) $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$; c) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; d) $\frac{x}{x^2-1}$; e) $\sqrt{1-x^2}$; f) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}-1}$.

Corrigé

1. $\frac{x^2+1}{x-1}$: degré 1, domaine $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; $\frac{x^5+7x}{5}$: degré 5, domaine $\mathbb{R}$; $\frac{x-1}{x^3+3x+2}$: degré -2 ; le dénominateur est strictement croissant, donc s'annule en un seul réel $r \approx -0{,}596$: domaine $\mathbb{R} \setminus \{r\}$; $\frac{x^2-1}{x^2+1}$: degré 0, domaine $\mathbb{R}$.
2. a) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; b) $]1, +\infty[$ (racine définie et non nulle) ; c) $\mathbb{R}$ ($x^2 + 1 > 0$) ; d) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; e) $[-1, 1]$ ($1 - x^2 \geq 0$) ;
f) il faut $1 - x^2 \geq 0$ et $\sqrt{1-x^2} \neq 1$, c.-à-d. $x \neq 0$: domaine $[-1, 0[\cup]0, 1]$.

Exercice 4 (S&B 2.8 et 2.9)

Exercice

1. Trouver la fonction linéaire dont le graphe : a) a pour pente 2 et ordonnée à l'origine $(0, 3)$; b) a pour pente -3 et ordonnée à l'origine $(0, 0)$; c) a pour pente 4 et passe par $(1, 1)$; d) a pour pente -2 et passe par $(2, -2)$; e) passe par $(2, 3)$ et $(4, 5)$; f) passe par $(2, -4)$ et $(0, 3)$.
2. Les fonctions suivantes étant supposées linéaires, interpréter économiquement leur pente : a) $F(q)$, recette de la production de q unités ; b) $G(x)$, coût d'achat de x unités ; c) $H(p)$, quantité consommée au prix p ; d) $C(Y)$, consommation nationale ; e) $S(Y)$, épargne nationale, en fonction du revenu national Y.

Corrigé

1. a) $y = 2x + 3$; b) $y = -3x$; c) $y = 4(x - 1) + 1 = 4x - 3$; d) $y = -2(x - 2) - 2 = -2x + 2$;
   e) $m = \frac{5-3}{4-2} = 1$, $y = x + 1$; f) $m = \frac{3-(-4)}{0-2} = -\frac{7}{2}$, $y = -\frac{7}{2}x + 3$.
2. a) **recette marginale** (ici le prix unitaire) ; b) **coût marginal** (prix d'achat unitaire) ; c) variation de la quantité demandée quand le prix augmente d'une unité (négative) ; d) **propension marginale à consommer** ; e) **propension marginale à épargner**. Comme $C + S = Y$, ces deux dernières ont pour somme 1.

Exercice 5 (S&B 2.10)

Exercice

1. Par la définition de la dérivée, montrer que la dérivée d'une fonction constante est nulle et que celle de $f(x) = mx + b$ est $f'(x) = m$.
2. Par la méthode de la preuve du théorème 2.2, montrer que la dérivée de x^3 est $3x^2$ et celle de x^4 est $4x^3$.

Corrigé

1. $\dfrac{b-b}{h} = 0 \to 0$; $\quad \dfrac{m(x+h)+b-(mx+b)}{h} = \dfrac{mh}{h} = m \to m.$
2. $\dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \dfrac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 \xrightarrow[h\to 0]{} 3x^2$;
   $\dfrac{(x+h)^4 - x^4}{h} = 4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3 \xrightarrow[h\to 0]{} 4x^3.$

Exercice 6 (S&B 2.11)

Exercice

Calculer la dérivée de : a) $-7x^3$; b) $12x^{-2}$; c) $3x^{-3/2}$; d) $\frac{1}{2}\sqrt{x}$; e) $3x^2 - 9x + 7x^{2/5} - 3x^{1/2}$; f) $4x^5 - 3x^{1/2}$; g) $(x^2+1)(x^2+3x+2)$; h) $(x^{1/2} + x^{-1/2})(4x^5 - 3\sqrt{x})$; i) $\frac{x-1}{x+1}$; j) $\frac{x}{x^2+1}$; k) $(x^5 - 3x^2)^7$; l) $5(x^5 - 6x^2 + 3x)^{2/3}$; m) $(x^3 + 2x)^3(4x+5)^2$.

Corrigé

a) $-21x^2$; b) $-24x^{-3}$; c) $-\frac{9}{2}x^{-5/2}$; d) $\frac{1}{4}x^{-1/2}$; e) $6x - 9 + \frac{14}{5}x^{-3/5} - \frac{3}{2}x^{-1/2}$; f) $20x^4 - \frac{3}{2}x^{-1/2}$;

g) $2x(x^2+3x+2) + (x^2+1)(2x+3) = 4x^3 + 9x^2 + 6x + 3$;

h) en développant : $4x^{11/2} + 4x^{9/2} - 3x - 3$, de dérivée $22x^{9/2} + 18x^{7/2} - 3$;

i) $\dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$; j) $\dfrac{(x^2+1)-2x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$; k) $7(x^5-3x^2)^6(5x^4-6x)$;

l) $\frac{10}{3}(x^5 - 6x^2 + 3x)^{-1/3}(5x^4 - 12x + 3)$;

m) $3(x^3+2x)^2(3x^2+2)(4x+5)^2 + 8(x^3+2x)^3(4x+5) =$
$(x^3+2x)^2(4x+5)\big[3(3x^2+2)(4x+5) + 8(x^3+2x)\big]$.

Exercice 7 (S&B 2.12)

Exercice

Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction donnée au point indiqué (indication : un point et la pente suffisent) : a) $f(x) = x^2$, $x_0 = 3$; b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$, $x_0 = 1$.

Corrigé

La tangente en x_0 est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (formule (3)).

a) $f(3) = 9$, $f'(3) = 6$: $y = 9 + 6(x-3) = 6x - 9$.

b) $f'(x) = \dfrac{(x^2+2) - 2x^2}{(x^2+2)^2} = \dfrac{2 - x^2}{(x^2+2)^2}$; $f(1) = \frac{1}{3}$, $f'(1) = \frac{1}{9}$:

$$y = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}(x-1) = \frac{x}{9} + \frac{2}{9}.$$

Exercice 8 (S&B 2.13 et 2.14)

Exercice

1. Démontrer les parties (a) et (b) du théorème 2.4.
2. À l'aide de la règle du quotient (théorème 2.4 d), étendre le théorème 2.3 aux entiers k négatifs.

Corrigé

1. (a)
   $\dfrac{(f \pm g)(x_0+h) - (f \pm g)(x_0)}{h} = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \pm \dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \to f'(x_0) \pm g'(x_0)$;
   (b) $\dfrac{kf(x_0+h)-kf(x_0)}{h} = k\,\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \to k\,f'(x_0)$.
2. Soit $k=-n$, $n \geq 1$ entier : $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ et, par la règle du quotient et le théorème 2.3,

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n\,x^{-n-1} = k\,x^{k-1}.$$

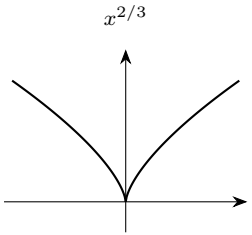
Exercice 9 (S&B 2.15 et 2.18)

Exercice

1. Montrer que $f(x) = |x|$ est dérivable en tout point autre que 0.
2. Tracer le graphe de $f(x) = x^{2/3}$ et étudier sa continuité et sa dérivabilité (la limite (8) doit être finie pour que la dérivée existe).

Corrigé

1. Si $x_0 > 0$, pour h petit, $x_0 + h > 0$ et $\frac{|x_0+h|-|x_0|}{h} = \frac{h}{h} = 1 : f'(x_0) = 1$. Si $x_0 < 0$, de même $f'(x_0) = -1$.
2. $x^{2/3} = (\sqrt[3]{x})^2$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Pour $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$. En 0 : $\frac{f(h)-f(0)}{h} = h^{-1/3}$, qui tend vers $+\infty$ si $h \to 0^+$ et vers $-\infty$ si $h \to 0^-$: f n'est pas dérivable en 0 (point de rebroussement, tangente verticale).



Exercice 10 (S&B 2.16 et 2.17)

Exercice

Tracer le graphe des fonctions suivantes et dire si elles sont continues, dérivables au point de raccordement de leurs deux formules. Lesquelles sont C^1 ?

$$a)\ \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} x^2+1, & x \geq 0 \\ -x^2-1, & x < 0 \end{cases} \quad c)\ \begin{cases} x^3, & x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases} \quad d)\ \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ 3x-2, & x \geq 1 \end{cases}$$

Corrigé

a) Les deux formules valent 0 en 0 : continue. Dérivées $2x$ et $-2x$, nulles en 0 : dérivable, $f'(x) = 2|x|$ continue : C^1.

b) Limites 1 et -1 en 0 : **discontinue**, donc non dérivable.

c) Valeurs 1 et 1 en 1 : continue ; pentes 3 et 1 : **non dérivable** en 1 (angle).

d) Valeurs 1 et 1 : continue ; pentes $3x^2 \to 3$ et 3 : dérivable, f' continue : C^1.

Exercice 11 (S&B 2.20 et 2.21)

Exercice

1. Calculer la dérivée seconde des fonctions a), b), c), d), i), j) de l'exercice 2.11.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de a) $f(x) = x^{5/3}$; b) $g(x) = [x]$, le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Corrigé

1. a) $-42x$; b) $72x^{-4}$; c) $\frac{45}{4}x^{-7/2}$; d) $-\frac{1}{8}x^{-3/2}$; i) $-\dfrac{4}{(x+1)^3}$; j) $\dfrac{-2x(x^2+1)-4x(1-x^2)}{(x^2+1)^3} = \dfrac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$.
2. a) f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3}$, continue : f est C^1. En revanche $f''(x) = \frac{10}{9}x^{-1/3}$ n'est pas définie en 0 : f n'est pas C^2.
   b) g est constante sur chaque intervalle $[n, n+1[$: elle y est continue et dérivable, de dérivée nulle. En chaque entier n, g saute de $n-1$ à n : elle est discontinue, donc non dérivable.

Exercice 12 (S&B 2.22 et 2.23)

Exercice

1. $C(x) = 2x^2 + 6x + 12$. Estimer par la différentielle le coût de production de la 21^{e} unité et comparer à sa valeur exacte.
2. $C(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}25x^2 + 300x + 100$. Estimer l'effet sur le coût d'une hausse de la production de 6 à $6{,}1$ unités.

Corrigé

1. $C'(x) = 4x + 6$, donc $C(21) - C(20) \approx C'(20) = 86$. Valeur exacte : $C(21) - C(20) = 1020 - 932 = 88$.
2. $C'(x) = 0{,}3x^2 - 0{,}5x + 300$, $C'(6) = 10{,}8 - 3 + 300 = 307{,}8$.
   $\Delta C \approx C'(6) \times 0{,}1 = 30{,}78$ (valeur exacte $30{,}7956$).

Exercice 13 (S&B 2.24 et 2.25)

Exercice

1. La population d'une ville dans t années sera $F(t) = 40 - \frac{8}{t+2}$ (en milliers). Estimer son augmentation au cours des six prochains mois.
2. Approcher par la différentielle : a) $\sqrt{50}$; b) $\sqrt[4]{9997}$; c) $(10{,}003)^5$.

Corrigé

1. $F'(t) = \frac{8}{(t+2)^2}$, $F'(0) = 2$; avec $\Delta t = 0{,}5$: $\Delta F \approx 1$, soit environ $1\,000$ habitants (valeur exacte : $0{,}8$).
2. a) $\sqrt{50} \approx \sqrt{49} + \frac{1}{2\sqrt{49}} \cdot 1 = 7 + \frac{1}{14} \approx 7{,}0714$ (exact : $7{,}0711$) ;
   b) $\sqrt[4]{9997} \approx 10 + \frac{1}{4} \cdot 10000^{-3/4} \cdot (-3) = 10 - \frac{3}{4000} = 9{,}99925$;
   c) $(10{,}003)^5 \approx 10^5 + 5 \cdot 10^4 \cdot 0{,}003 = 100\,150$.