# Mathématiques pour économistes – Chapitre 3

## Fonctions à une variable : applications

Faïçal Lakhchen

Faculté d'Économie et de Gestion Nador, Université Mohammed Premier
https://faicallakhchen.github.io/ | f.lakhchen@ump.ac.ma

Octobre 2026

# Où en sommes-nous ?

- Chap. 1 : Introduction
- Chap. 2 : Fonctions à une variable : fondements
- **Chap. 3 : Fonctions à une variable : applications**
- Chap. 4 : Dérivée d'une composée
- Chap. 5 : Exponentielles et logarithmes
- Chap. 6 : Introduction à l'algèbre linéaire
- Chap. 7 : Systèmes d'équations linéaires
- Chap. 8 : Algèbre matricielle
- Chap. 9 : Déterminants : approche élémentaire
- Chap. 10 : Espaces euclidiens
- Chap. 11 : Indépendance linéaire
- Chap. 12 : Limites et ensembles ouverts
- Chap. 13 : Fonctions de plusieurs variables
- Chap. 14 : Calcul différentiel à plusieurs variables
- Chap. 15 : Fonctions implicites et leurs dérivées
- Chap. 16 : Formes quadratiques et matrices définies
- Chap. 17 : Optimisation sans contrainte
- Chap. 18 : Optimisation sous contrainte I
- Chap. 19 : Optimisation sous contrainte II
- Chap. 20 : Fonctions homogènes et homothétiques
- Chap. 21 : Fonctions concaves et quasi-concaves
- Chap. 22 : Applications économiques de l'optimisation
- Chap. 23 : Valeurs propres et vecteurs propres
- Chap. 24 : Équations différentielles scalaires
- Chap. 25 : Systèmes d'équations différentielles
- Chap. 26 : Déterminants : les détails
- Chap. 27 : Sous-espaces associés à une matrice
- Chap. 28 : Applications de l'indépendance linéaire
- Chap. 29 : Limites et ensembles compacts
- Chap. 30 : Calcul à plusieurs variables II

# Plan du chapitre

Utilisation de la dérivée première pour le tracé

Dérivées secondes et convexité

Tracé des fonctions rationnelles

Comportement à l'infini et asymptotes horizontales

Maximums et minimums

Applications à l'économie

Exercices corrigés

# Objectif du chapitre

- La première étape de l'étude d'une relation entre deux variables est de **tracer son graphe**. Pour une fonction non linéaire, c'est souvent difficile : les sections 3.1 à 3.4 montrent comment la dérivée permet de tracer des graphes plus efficacement et plus précisément.
- De nombreux problèmes économiques sont des problèmes d'**optimisation** : maximisation du profit ou de l'utilité, minimisation du coût ou du risque. La section 3.5 montre comment utiliser la dérivée pour les résoudre et pour dégager les principes économiques sous-jacents.
- La section 3.6 présente les principales applications du calcul différentiel à la microéconomie : fonctions de production, de coût, de profit et de demande.

# Dérivée positive ⇒ fonction croissante

**Théorème (3.1)**

*Soit $f$ continûment dérivable en $x_0$.*

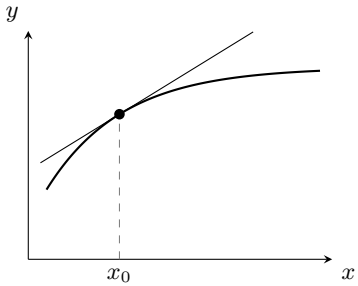
(a) *Si $f'(x_0) > 0$, il existe un intervalle ouvert contenant $x_0$ sur lequel $f$ est croissante.*

(b) *Si $f'(x_0) < 0$, il existe un intervalle ouvert contenant $x_0$ sur lequel $f$ est décroissante.*

*Preuve de (a).* Géométriquement : la tangente en $x_0$ monte, donc le graphe aussi. Analytiquement :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) > 0,$$

donc pour $h > 0$ petit, $f(x_0+h) - f(x_0) > 0$ : pour $x_1$ proche de $x_0$, $x_1 > x_0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_0)$. ■




Si $f'(x_0) > 0$, le graphe de $f$ monte (fig. 3.1).

# Version globale

**Théorème (3.2)**

*Soit $f$ une fonction continûment dérivable sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$.*

- *Si $f' > 0$ sur l'intervalle $]a, b[ \subset D$, alors $f$ est croissante sur $]a, b[$.*
- *Si $f' < 0$ sur l'intervalle $]a, b[ \subset D$, alors $f$ est décroissante sur $]a, b[$.*
- *Si $f$ est croissante sur $]a, b[$, alors $f' \geq 0$ sur $]a, b[$.*
- *Si $f$ est décroissante sur $]a, b[$, alors $f' \leq 0$ sur $]a, b[$.*

- Les deux premiers énoncés découlent du théorème 3.1 : une fonction croissante en chaque point d'un intervalle est croissante sur tout l'intervalle. Les deux derniers découlent des deux premiers.
- Utile dès qu'on connaît le signe de $f'$ et qu'on veut savoir si $f$ croît : par exemple, en 3.6, « si le coût marginal dépasse le coût moyen, le coût moyen croît ».

# Utiliser la dérivée première pour tracer un graphe

Il faut trouver les intervalles où $f' > 0$ et ceux où $f' < 0$.

1. Trouver les points où $f'(x) = 0$ ou bien où $f'$ n'est pas définie : ce sont les **points critiques** de $f$, $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$.
2. Calculer $f$ en chacun de ces points et placer les points correspondants sur le graphe.
3. Étudier le signe de $f'$ sur chacun des intervalles

$$]-\infty, x_1[,\ ]x_1, x_2[,\ \ldots,\ ]x_{k-1}, x_k[,\ ]x_k, +\infty[.$$

   Sur chacun d'eux, $f'$ est continue et ne s'annule pas : elle garde un signe constant (valeurs intermédiaires). Il suffit donc de tester le signe de $f'$ en **un point** de l'intervalle.
4. Si $f' > 0$ sur $I$, tracer un graphe croissant sur $I$ ; si $f' < 0$, un graphe décroissant.

**Remarque**

Ajouter l'ordonnée à l'origine $(0, f(0))$ et, quand c'est facile, les points où $f(x) = 0$.

# Exemple 3.1 : $f(x) = x^3 - 3x$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ s'annule en $x = -1$ et $x = +1$ : points critiques, avec $f(-1) = 2$ et $f(1) = -2$.

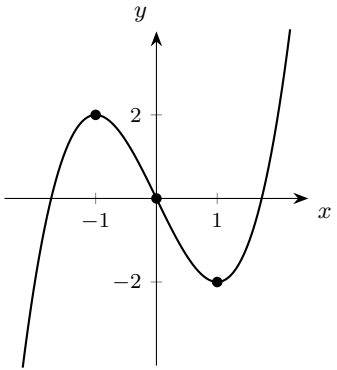
Signe de $f'$ sur $J_1 = ]-\infty, -1[$, $J_2 = ]-1, 1[$, $J_3 = ]1, +\infty[$ :

- $f'(-2) = 9 > 0$ : $f$ croissante sur $J_1$ ;
- $f'(0) = -3 < 0$ : $f$ décroissante sur $J_2$ ;
- $f'(2) = 9 > 0$ : $f$ croissante sur $J_3$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $\nearrow$ | | $2$ | $\searrow$ | $-2$ | | $\nearrow$ |

Résumé de l'information donnée par $f'$ (fig. 3.2)

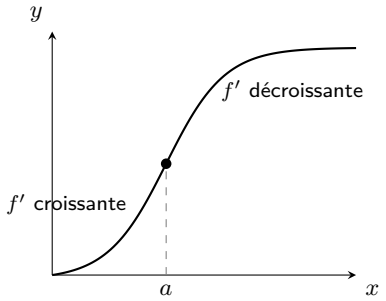
Ordonnée à l'origine : $(0, 0)$. Zéros : $x(x^2 - 3) = 0 \iff x \in \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$.




Graphe de $f(x) = x^3 - 3x$ (fig. 3.3)

# Au-delà de la monotonie : la forme du graphe

- Une **fonction de production** $y = f(x)$ ($x$ : nombre de travailleurs) est croissante. Mais sa pente (la **productivité marginale du travail**) croît d'abord (spécialisation, coopération), puis décroît (concurrence pour l'espace et les ressources).
- Même allure pour les **courbes d'apprentissage**.
- Sur $]0, a[$, $f'$ est croissante, donc $f'' \geq 0$ ; sur $]a, \infty[$, $f'$ est décroissante, donc $f'' \leq 0$.

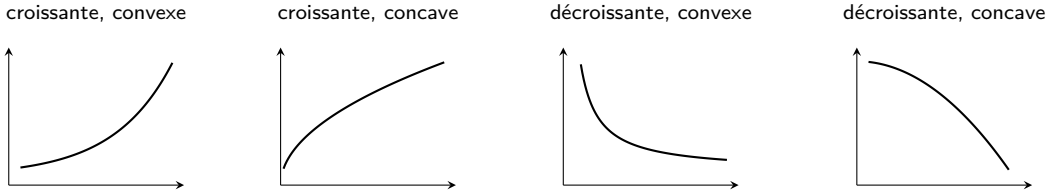



Une fonction de production typique (fig. 3.4)

**Définition**

Une fonction dérivable $f$ est **convexe** (« concave up ») sur $I$ si $f'' \geq 0$ sur $I$ ($f'$ croissante), et **concave** (« concave down ») si $f'' \leq 0$ sur $I$ ($f'$ décroissante).

# Croissante ou décroissante, convexe ou concave




Figures 3.5 et 3.6

- Une fonction croissante peut être convexe ou concave sur son intervalle de croissance ; de même pour une fonction décroissante.
- La pente de $f$ est une fonction croissante de $x$ si $f$ est convexe, décroissante si $f$ est concave.

# Définition sans dérivées : la sécante

Les points entre $a$ et $b$ forment l'ensemble des **combinaisons convexes** de $a$ et $b$ :

$$I_{ab} = \{(1-t)a + tb : 0 \leq t \leq 1\}.$$

La sécante joignant $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est

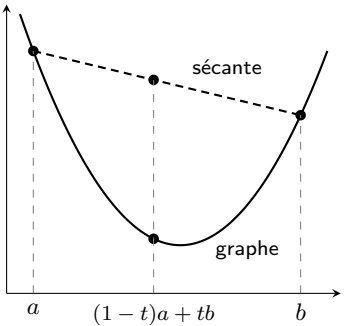
$$\{\big((1-t)a + tb,\ (1-t)f(a) + tf(b)\big) : t \in [0,1]\}.$$

Le graphe de $f$ au-dessus de $I_{ab}$ est

$$\{\big((1-t)a + tb,\ f((1-t)a + tb)\big) : t \in [0,1]\}.$$

Pour une fonction convexe, la sécante est **au-dessus** du graphe :

$$(1-t)f(a) + tf(b) \geq f\big((1-t)a + tb\big). \quad (1)$$




Pour une fonction convexe, la sécante est au-dessus du graphe (fig. 3.7).

# Définition générale de la convexité

- La caractérisation (1) est plus générale que le critère $f'' \geq 0$ : elle s'applique aussi aux fonctions non dérivables. On la prend donc comme **définition**.
- Pour une fonction $C^2$, (1) équivaut à $f'' \geq 0$ sur $I_{ab}$.

**Définition**

$f$ est **convexe** (« concave up ») sur un intervalle $I$ si et seulement si

$$f\big((1-t)a+tb\big) \leq (1-t)f(a)+tf(b) \quad \text{pour tous } a,b \in I \text{ et tout } t \in [0,1]. \tag{2}$$

$f$ est **concave** (« concave down ») sur $I$ si et seulement si

$$f\big((1-t)a+tb\big) \geq (1-t)f(a)+tf(b) \quad \text{pour tous } a,b \in I \text{ et tout } t \in [0,1]. \tag{3}$$

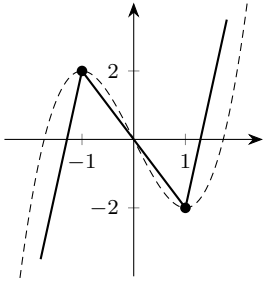
Les fonctions de plusieurs variables vérifiant (2) ou (3) jouent un rôle central en théorie économique, où les termes « convexe » et « concave » sont standard.

# Points d'inflexion ; exemple 3.2

- Le test de convexité imite celui de monotonie avec $f''$ au lieu de $f'$ : on résout $f''(x) = 0$ ; ces points sont les **points critiques d'ordre deux** de $f$.
- Si $f''$ y change effectivement de signe, ce sont des **points d'inflexion**.
- Sur chaque intervalle entre deux tels points, $f''$ garde un signe constant : un point test suffit.

**Exemple (3.2)**

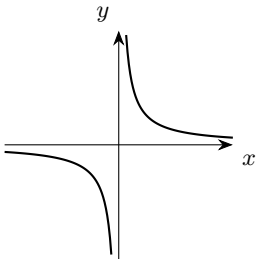
$f(x) = x^3 - 3x$. La dérivée première seule autoriserait le graphe anguleux ci-contre. Avec $f''(x) = 6x$ : $f'' < 0$ pour $x < 0$ et $f'' > 0$ pour $x > 0$. Donc $f$ est **concave** sur $]-\infty, 0[$, **convexe** sur $]0, +\infty[$, et $0$ est un point d'inflexion : on obtient la figure 3.3.




Un candidat (trait plein) pour le graphe de $x^3 - 3x$ (fig. 3.8), et le vrai graphe (pointillés).

# Asymptotes verticales

- Les fonctions rationnelles ont un dénominateur : leur graphe est plus délicat à tracer que celui d'un polynôme.
- $f(x) = 1/x$ n'est pas définie en $0$ ; $f(x) \to -\infty$ quand $x \to 0^-$ et $f(x) \to +\infty$ quand $x \to 0^+$. La droite $x = 0$ est une **asymptote verticale**.
- En général, si le dénominateur de $f$ s'annule en $x_0$ (et pas le numérateur), la droite $\{x = x_0\}$ est une asymptote verticale ; de chaque côté, $f$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.
- Traiter les zéros du dénominateur comme des points critiques d'ordre un et deux : $f'$ et $f''$ peuvent changer de signe en traversant une asymptote verticale.
- Si $f' < 0$ juste à gauche de l'asymptote, $f$ y tend vers $-\infty$ ; si $f' > 0$, vers $+\infty$. Idem à droite.



Graphe de $f(x) = 1/x$ (fig. 3.9)

# Conseils pour le tracé

1. Pour trouver les points d'intersection d'une fonction rationnelle avec l'axe des $x$, il suffit d'annuler son **numérateur**. S'il n'y a pas de zéro sur un intervalle entre points critiques et/ou asymptotes, le graphe ne traverse pas l'axe des $x$ sur cet intervalle : remarque très utile pour un tracé précis.
2. La fonction, sa dérivée première et sa dérivée seconde donnent chacune des informations sur le graphe de $f$. Éviter de dire « elle » sans préciser de laquelle on parle : savoir à tout moment sur quelle dérivée on travaille évite bien des confusions.

**Démarche complète**

domaine et asymptotes verticales $\rightarrow$ points critiques et signe de $f' \rightarrow$ signe de $f'' \rightarrow$ intersections avec les axes $\rightarrow$ comportement à l'infini (section suivante).

# Comportement à l'infini des polynômes

- Pour un polynôme, le **terme dominant** (monôme de plus haut degré) détermine l'allure du graphe pour $|x|$ grand.
- Exemple : $x^3 - 4x^2 + 5x - 6$ en $x = 10^{10}$ : $x^3 = 10^{30}$ (31 chiffres) alors que $-4x^2 = -4 \cdot 10^{20}$ (21 chiffres) ; l'ajout ne modifie pas les 10 premiers chiffres de $x^3$.
- Pour $|x|$ très grand, le graphe de $f(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_{k-1}x + a_k$ est déterminé par $a_0x^k$, donc par le signe de $a_0$ et la parité de $k$.

$k$ pair, $a_0 > 0$ | $k$ pair, $a_0 < 0$ | $k$ impair, $a_0 > 0$ | $k$ impair, $a_0 < 0$



$k$ pair : les deux branches vont vers $+\infty$ ($a_0 > 0$) ou vers $-\infty$ ($a_0 < 0$) ; $k$ impair : une branche vers $+\infty$, l'autre vers $-\infty$.

# Asymptotes horizontales des fonctions rationnelles

Soit

$$g(x) = \frac{a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_{k-1} x + a_k}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m}, \qquad a_0, b_0 \neq 0.$$

Pour $|x|$ grand, numérateur et dénominateur se comportent comme leurs termes dominants : $g$ se comporte comme le monôme

$$\ell(x) = \frac{a_0 x^k}{b_0 x^m} = \frac{a_0}{b_0}\, x^{k-m}.$$

- $k > m$ : $\ell$ est un monôme de degré positif ; les branches de $g$ vont vers $\pm\infty$, comme pour un polynôme.
- $k < m$ : $\ell(x) \to 0$ quand $|x| \to \infty$ (comme $1/x$) ; l'axe des $x$ est une **asymptote horizontale** du graphe de $g$.
- $k = m$ : $\ell$ est la constante non nulle $a_0/b_0$ ; quand $|x| \to \infty$, $g(x) \to a_0/b_0$ et la droite $y = a_0/b_0$ est une **asymptote horizontale**.

*Exemples :* $\frac{x^2+3x}{x^2-1} \to 1$ ; $\frac{x}{x^2+1} \to 0$ ; les branches de $\frac{x^2+1}{x}$ tendent vers $\pm\infty$.

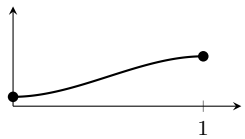
# Maximums et minimums locaux et globaux

**Définition**

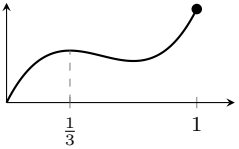
$f$ admet en $x_0$ un **maximum local** (ou relatif) si $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x$ d'un intervalle ouvert contenant $x_0$ ; un **maximum global** (ou absolu) si $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x$ du domaine de $f$. Définitions analogues pour les **minimums** avec $f(x) \geq f(x_0)$.

- On dira simplement que $x_0$ est un **max** (**min**) de $f$ ; « max global » (« min global ») pour insister.
- Un max ou un min peut se trouver en une extrémité du domaine (**max/min au bord**), ou en un point qui n'est pas une extrémité (**max/min intérieur**). Si le domaine est $\mathbb{R}$ ou un intervalle ouvert, tout max est intérieur.

max au bord en $x = 1$ (fig. 3.11)




max intérieur en $x = \frac{1}{3}$ (fig. 3.12)

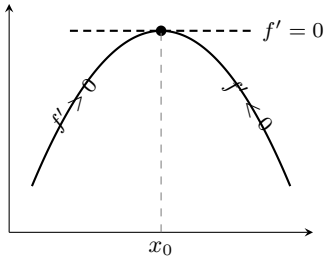


# Condition du premier ordre

**Théorème (3.3)**

*Si $x_0$ est un max ou un min **intérieur** de $f$, alors $x_0$ est un point critique de $f$.*

*Preuve.* Autour d'un max ou min intérieur, $f$ n'est ni croissante ni décroissante. Par le théorème 3.1, $f'(x_0)$ ne peut être ni $> 0$ ni $< 0$ : $f'(x_0) = 0$ ou n'est pas définie. Géométriquement, si le graphe admet une tangente en un max ou un min, elle est horizontale puisque le graphe « fait demi-tour ». ■




Le graphe de $f$ en un max $x_0$ (fig. 3.13)

**Exemple (3.3)**

Pour $f(x) = x^3 - 3x$ (fig. 3.3), le max local et le min local sont aux points critiques $x = -1$ et $x = +1$.

# Extremums au bord

Exemple (3.4)

Comme le montre la figure 3.11, la dérivée de $f$ en un max ou un min **au bord** n'est pas forcément nulle. La fonction de production de la figure 3.4 a pour domaine $[0, \infty[$ ; comme elle est croissante, son min (global) est atteint au point du bord $x = 0$, où sa dérivée n'est pas nécessairement nulle.

- Le théorème 3.3 ne concerne que les extremums **intérieurs**.
- Les candidats à un extremum sont donc : les points critiques intérieurs **et** les extrémités du domaine.

# Conditions du second ordre

**Théorème (3.4)**

(a) *Si* $f'(x_0) = 0$ *et* $f''(x_0) < 0$, *alors* $x_0$ *est un max de* $f$ ;
(b) *si* $f'(x_0) = 0$ *et* $f''(x_0) > 0$, *alors* $x_0$ *est un min de* $f$ ;
(c) *si* $f'(x_0) = 0$ *et* $f''(x_0) = 0$, $x_0$ *peut être un max, un min ou ni l'un ni l'autre.*

*Preuve de (a).* Géométriquement : tangente horizontale en $x_0$ et graphe tourné vers le bas (fig. 3.13). Analytiquement : $f''(x_0) < 0$ signifie que $f'$ est décroissante sur un intervalle autour de $x_0$ ; comme $f'(x_0) = 0$, $f' > 0$ à gauche de $x_0$ et $f' < 0$ à droite. Par le théorème 3.1, $f$ croît à gauche et décroît à droite de $x_0$ : max local. ■

**Remarque**

Un point critique où $f''$ s'annule aussi est un **point critique dégénéré**. Pour conclure, il faut plus d'information que le signe de $f''$ en ce point, par exemple le signe de $f'$ sur tout un intervalle autour du point critique.

# Le cas dégénéré $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$

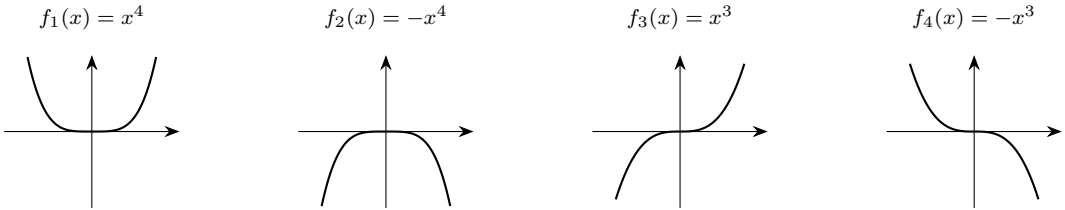



Figure 3.14

- Ces quatre fonctions vérifient $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 0$.
- Pourtant $0$ est un min local de $f_1$, un max local de $f_2$, tandis que $f_3$ est strictement croissante en $0$ et $f_4$ strictement décroissante en $0$.
- C'est la partie (c) du théorème 3.4 : le test de la dérivée seconde ne permet pas de conclure.

# Exemple 3.5 : $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4$

Points critiques :

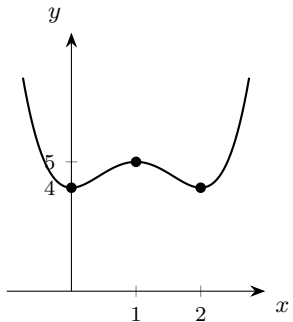
$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x-1)(x-2) = 0$$

pour $x = 0, 1, 2$ : seuls candidats pour un max ou un min.

Dérivée seconde : $f''(x) = 12x^2 - 24x + 8$, et

$$f''(0) = 8 > 0, \quad f''(1) = -4 < 0, \quad f''(2) = 8 > 0.$$

Par le théorème 3.4, $x = 0$ et $x = 2$ sont des **min locaux** $(f(0) = f(2) = 4)$ et $x = 1$ est un **max local** $(f(1) = 5)$.




Graphe de $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4$
(fig. 3.15)

# Maximums et minimums globaux

- Dans l'exemple 3.5, $x = 0$ et $x = 2$ sont des min globaux, mais $x = 1$ n'est pas un max global : $f(x) \to \infty$ quand $x \to \infty$. Si $f$ était le profit d'une entreprise, il serait absurde de s'arrêter au max local $x = 1$ : $f$ n'a pas de max global.
- En général, il est difficile de trouver un max global, ou de prouver qu'un max local est global. Trois situations sont plus simples :
  1. $f$ n'a qu'**un seul point critique** dans son domaine ;
  2. $f'' > 0$ ou $f'' < 0$ sur tout le domaine de $f$ ;
  3. le domaine de $f$ est un **intervalle fermé borné**.

**Théorème (3.5 : un seul point critique)**

*Si (a) le domaine de $f$ est un intervalle $I$ (borné ou non), (b) $x_0$ est un max local de $f$ et (c) $x_0$ est l'unique point critique de $f$ sur $I$, alors $x_0$ est le **max global** de $f$ sur $I$.*

# Preuve du théorème 3.5 ; dérivée seconde de signe constant

*Preuve du théorème 3.5.* Supposons que $x_0$ ne soit pas le max global : il existe $y_0 \in I$ avec $f(y_0) > f(x_0)$, disons $y_0 > x_0$. Comme $f$ décroît juste à droite de $x_0$ puis croît pour atteindre $f(y_0)$, elle passe de décroissante à croissante en un point $z_0$ entre $x_0$ et $y_0$. Alors $z_0$ est un min local intérieur, donc un point critique distinct de $x_0$ : contradiction. ■

**Théorème (3.6)**

*Si $f$ est de classe $C^2$ sur un intervalle $I$ et si $f''$ ne s'annule jamais sur $I$, alors $f$ a au plus un point critique sur $I$. Ce point critique est un **min global** si $f'' > 0$ et un **max global** si $f'' < 0$.*

*Preuve.* Si $f'' > 0$ sur $I$, $f'$ est croissante (théorème 3.2) donc s'annule au plus une fois. Si $f'(x_0) = 0$, $x_0$ est un min local ($f''(x_0) > 0$), donc global par le théorème 3.5. ■

Conséquence : un point critique d'une fonction $C^2$ **convexe** sur un intervalle est nécessairement un **min global** ; tout max local est alors situé en une extrémité du domaine. De même, un point critique d'une fonction $C^2$ **concave** est un **max global**.

# Absence d'extremum global ; intervalles fermés bornés

- Une fonction définie sur un intervalle **ouvert** peut ne pas avoir de max ou de min global : $x^3 - 3x$ (fig. 3.3) tend vers $+\infty$ et $-\infty$. Une fonction strictement monotone sur un intervalle ouvert n'a ni max ni min.
- Certaines fonctions ont un min global mais pas de max global : $x^4$ (fig. 3.14), $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4$ (fig. 3.15).

**Théorème (Weierstrass)**

*Une fonction continue sur un intervalle **fermé et borné** $[a, b]$ y atteint un max global et un min global (voir th. 30.1).*

Par le théorème 3.3, un max ou min intérieur est un point critique ; les seuls autres candidats sont les bornes $a$ et $b$. Pour trouver le max global d'une fonction $C^1$ sur $[a, b]$ :

1. calculer les points critiques de $f$ en résolvant $f'(x) = 0$ pour $x \in ]a, b[$ ;
2. évaluer $f$ en ces points critiques et aux bornes $a$ et $b$ ;
3. retenir le point qui donne la plus grande valeur de $f$.

# Exemple 3.6

**Exemple (3.6)**

$x$ années après sa fondation en 1960, une association de statisticiens compte $f(x) = 2x^3 - 45x^2 + 300x + 500$ membres. Entre 1960 et 1980, quels ont été ses effectifs maximal et minimal, et quand ?

Il s'agit de maximiser et minimiser $f$ sur l'intervalle fermé $[0, 20]$. Points critiques :

$$0 = f'(x) = 6x^2 - 90x + 300 = 6(x^2 - 15x + 50) = 6(x-5)(x-10),$$

soit $x = 5$ et $x = 10$. On évalue $f$ aux points critiques et aux bornes :

| $x$ | $0$ | $5$ | $10$ | $20$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $500$ | $1125$ | $1000$ | $4500$ |

Le max global est atteint en $x = 20$ (1980) et le min global en $x = 0$ (1960).

(Le livre imprime $f(20) = 10375$ ; le calcul donne $16000 - 18000 + 6000 + 500 = 4500$, la conclusion est inchangée.)

# Fonctions de production

- On étudie désormais des **classes** de fonctions caractérisées par leurs propriétés plutôt que par leur formule.
- Fonction de production $y = f(q)$ : quantité produite avec $q$ unités de facteur (par exemple du travail). Hypothèses :
  1. $f$ est continue, voire $C^2$ ;
  2. $f$ est croissante ;
  3. il existe un niveau $a$ tel que $f$ est convexe pour $0 \leq q < a$ et concave pour $q > a$.
- Si $f$ est $C^2$, cela se traduit par

$$\left.\begin{array}{ll} (2') & f'(q) > 0 \text{ pour tout } q, \\ (3') & \text{pour un } a \geq 0,\ f''(q) > 0 \text{ sur } [0, a[ \text{ et } f''(q) < 0 \text{ pour } q > a. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

- Famille à deux **paramètres** $y = kq^b$ $(k, b > 0)$ : toujours concave si $0 < b < 1$ $(a = 0)$, toujours convexe si $b > 1$ $(a = \infty)$.
- Ces formes fonctionnelles aident l'intuition, mais un principe économique qui ne vaudrait que pour elles serait suspect.

# Fonctions de coût

- Une **fonction de coût** $C(x)$ associe à chaque niveau de *production* $x$ le coût total de cette production ; elle est croissante.
- Sa dérivée $C'(x)$ est le **coût marginal** $MC(x)$ : coût supplémentaire d'une unité de plus (section 2.7).
- Le **coût moyen** est $AC(x) = C(x)/x$ : coût par unité produite.

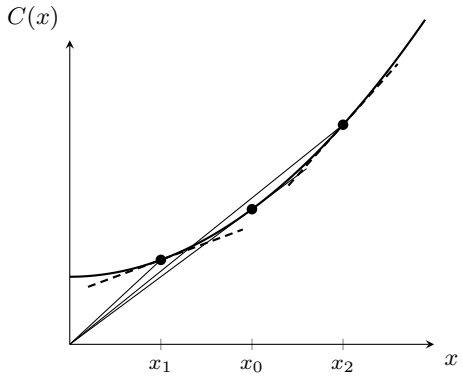
**Théorème (3.7)**

*Soit $C$ une fonction de coût de classe $C^1$. (a) si $MC > AC$, $AC$ est croissant ; (b) si $MC < AC$, $AC$ est décroissant ; (c) en un minimum intérieur de $AC$, $AC = MC$.*

*Preuve.* Par la règle du quotient,
$AC'(x) = \dfrac{C'(x)\,x - C(x)}{x^2} = \dfrac{C'(x) - C(x)/x}{x} = \dfrac{MC - AC}{x}$, d'où (a) et (b) ; (c) découle du théorème 3.3 : $AC'(x_0) = 0$. ■

# Interprétation géométrique : la courbe de coût

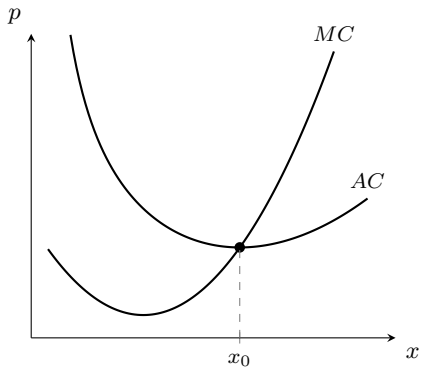
- Intuition : si votre résultat du jour est meilleur que votre moyenne, votre moyenne monte ; s'il est moins bon, elle baisse.
- $MC(x)$ est la pente de la **tangente** à la courbe de coût en $(x, C(x))$.
- $AC(x) = \dfrac{C(x) - 0}{x - 0}$ est la pente du **rayon** joignant l'origine à $(x, C(x))$.
- $C(0) > 0$ : il existe des **coûts fixes**.
- En $x_1$ : $AC > MC$, $AC$ décroît ; en $x_2$ : $MC > AC$, $AC$ croît. En $x_0$, la pente du rayon est minimale et le rayon est tangent à la courbe : $AC(x_0) = MC(x_0)$.




Rayons (pente $AC$) et tangentes (pente $MC$)
(fig. 3.16 et 3.17)

# Les courbes $AC$ et $MC$

- Quand $x$ va de $0$ à $\infty$, la pente du rayon partant de l'origine est d'abord très grande, diminue jusqu'à son minimum en $x_0$, puis augmente indéfiniment : la courbe $AC$ est en **U**.
- Pour $x < x_0$, la courbe $MC$ est **sous** la courbe $AC$ et $AC$ décroît ; pour $x > x_0$, $MC$ est **au-dessus** et $AC$ croît.
- $MC$ coupe $AC$ en son minimum.
- Cette figure joue un rôle majeur dans l'étude de l'entreprise en microéconomie.




Les courbes $AC$ et $MC$ (fig. 3.18)

# Recette et profit

- $R(x)$ : **recette** de l'entreprise pour $x$ unités vendues ; $MR(x) = R'(x)$ : **recette marginale**. Si $p(x)$ est le prix unitaire, $R(x) = p(x) \cdot x$.
- En **concurrence parfaite** (nombreuses entreprises, aucune ne peut influer sur le prix), $p(x) = p$ est constant, $R(x) = p \cdot x$ et

$$MR = AR = p : \tag{5}$$

recette marginale et recette moyenne sont égales.

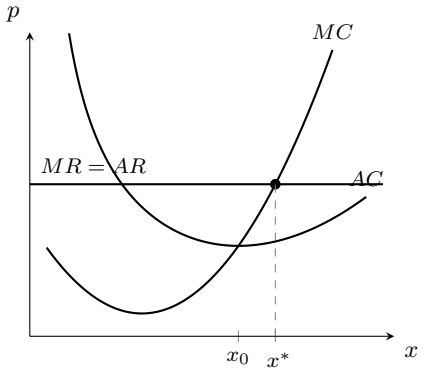
- Le **profit** est $\Pi(x) = R(x) - C(x)$, défini sur $[0, \infty[$. Par le théorème 3.3, la production optimale $x^*$, si elle n'est pas nulle, vérifie

$$\Pi'(x^*) = R'(x^*) - C'(x^*) = MR(x^*) - MC(x^*) = 0, \quad \text{soit} \quad MR(x^*) = MC(x^*).$$

- Intuition : produire tant que le coût d'une unité de plus ($MC$) est compensé par la recette qu'elle rapporte ($MR$). Si $MR > MC$, produire davantage ; si $MC > MR$, l'unité supplémentaire réduit le profit.

# L'entreprise concurrentielle

- $R(x) = p \cdot x$ : la recette marginale est la droite horizontale $y = p$ ($MR = AR$).
- La production optimale $x^*$ est à l'intersection des courbes $MR$ et $MC$ : $p = MC(x^*)$.
- Si $p$ augmente, la droite $MR$ monte et $x^*$ augmente : la courbe $MC$ est le lieu des couples prix–production optimaux, c'est-à-dire la **courbe d'offre** de l'entreprise.
- Condition du second ordre : $\Pi''(x) = 0 - C''(x)$ et $\Pi''(x^*) \leq 0$ (théorème 3.4), donc $C''(x^*) \geq 0$ : à l'optimum, le **coût marginal est croissant**.




Courbes $AC$, $MC$, $AR$ et $MR$ d'une entreprise concurrentielle (fig. 3.19)

# Fonctions de demande

- En monopole ou en oligopole, la quantité vendue $x$ et le prix $p$ sont liés :
  - $x = F(p)$ : **fonction de demande** ;
  - $p = G(x)$ : **fonction de demande inverse**, facteur naturel de la recette $R(x) = p \cdot x = G(x) \cdot x$. Comme $G(x) = R(x)/x$, c'est aussi la **recette moyenne**.
- La sensibilité de la demande au prix se mesure naturellement par la pente $F'(p)$ ou $\Delta x/\Delta p$ (**demande marginale**). Mais cette mesure dépend des unités.
- Exemple : une hausse de 10 cents du prix de l'essence réduit la consommation d'un million de gallons :

$$\frac{\Delta x}{\Delta p} = \frac{-10^6}{10} = -10^5$$

  (gallons, cents) ; $-10^7$ si $p$ est en dollars ; $-0{,}1$ si $x$ est en millions de gallons et $p$ en cents.
- On veut une mesure **indépendante des unités**, permettant de comparer pays, monnaies et unités de mesure.

# Élasticité-prix de la demande

- Le **taux de variation** $\dfrac{q_1 - q_0}{q_0} = \dfrac{\Delta q}{q_0}$ est sans unité. Ex. : passer de $1{,}25$ à $1{,}50$ \$, c'est $0{,}25/1{,}25 = 20\,\%$, quelle que soit la monnaie.
- On mesure variation de quantité et variation de prix en pourcentage : l'**élasticité-prix de la demande** est

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x} \Big/ \frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta x}{\Delta p} \cdot \frac{p}{x} = \frac{\Delta x / \Delta p}{x/p}, \tag{8}$$

  variation en % de la demande pour une hausse de 1 % du prix : demande marginale divisée par demande moyenne.
- En remplaçant $\Delta x/\Delta p$ par $F'(p)$ et $x$ par $F(p)$ :

$$\varepsilon = \frac{F'(p) \cdot p}{F(p)}. \tag{9}$$

- (8) est l'**élasticité d'arc** (nombre fini de couples prix–quantité) ; (9) l'**élasticité ponctuelle** (courbe de demande continue).

# Élasticité et dépense totale

- La demande est décroissante en $p$ (on ignore les biens de Giffen) : $\varepsilon < 0$.
- Biens peu sensibles au prix (nécessités : fioul, soins) : $\varepsilon$ proche de $0$. Biens à nombreux substituts ou de luxe : $\varepsilon$ fortement négative.

**Définition**

Un bien est **inélastique** si $-1 < \varepsilon < 0$, **élastique** si $-\infty < \varepsilon < -1$, d'**élasticité unitaire** si $\varepsilon = -1$.

**Théorème (3.8)**

*Pour un bien inélastique, une hausse du prix **augmente** la dépense totale ; pour un bien élastique, elle la **diminue**.*

*Preuve.* La dépense est $E(p) = p \cdot F(p)$, donc $E'(p) = p\,F'(p) + F(p)$ et, en divisant par $F(p) > 0$,

$$\frac{E'(p)}{F(p)} = \frac{p\,F'(p)}{F(p)} + 1 = \varepsilon + 1. \tag{10}$$

Inélastique : $\varepsilon + 1 > 0$, $E' > 0$ ; élastique : $\varepsilon + 1 < 0$, $E' < 0$. ■

# Demande linéaire et demande à élasticité constante

Deux formes fonctionnelles usuelles :

$$x = F(p) = a - bp \quad (a, b > 0), \tag{11}$$

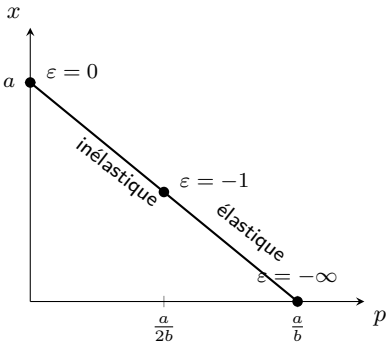
$$x = F(p) = kp^{-r} \quad (k, r > 0). \tag{12}$$

Pour la demande linéaire, l'élasticité varie le long de la droite :

$$\varepsilon = \frac{F'(p)\,p}{F(p)} = \frac{-bp}{a - bp} = \frac{1}{1 - a/(bp)},$$

de $\varepsilon = 0$ en $p = 0$ ($x = a$) à $\varepsilon = -\infty$ en $p = a/b$ ($x = 0$).

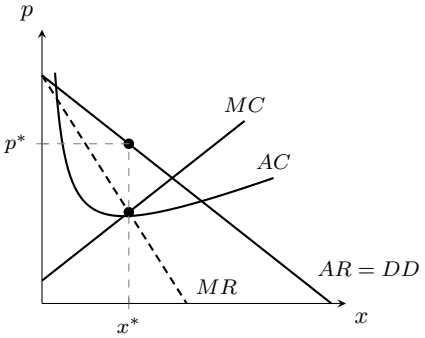
Ici $p$ est en abscisse. Ailleurs (coût, recette, profit), on place la quantité en abscisse ; pour intégrer la demande aux graphiques de coût, on tracera la demande inverse $p = G(x)$.




Demande linéaire $x = a - bp$ (fig. 3.20)

# Le monopole

- En concurrence parfaite, la courbe de recette moyenne est horizontale. Cas opposé : un **monopole** face à la demande linéaire $x = a - bp$.
- Demande inverse : $p = \dfrac{a}{b} - \dfrac{1}{b}\,x.$ (13)
- Recette : $R(x) = \left(\dfrac{a}{b} - \dfrac{1}{b}\,x\right)x$ ; recette marginale $R'(x) = \dfrac{a}{b} - \dfrac{2}{b}\,x$ : même ordonnée à l'origine que la demande inverse ($= AR$), pente double.
- La production optimale $x^*$ est à l'intersection de $MR$ et $MC$ ; le prix $p^*$ se lit sur la courbe de **demande** au-dessus de $x^*$ (et non sur $MR$).
- Si les coûts augmentent (la courbe $MC$ monte), la production baisse et le prix monte.




Courbes $MC$, $AC$, $MR$ et $AR$ d'un monopole (fig. 3.21)

# Exercice 1

**Exercice**

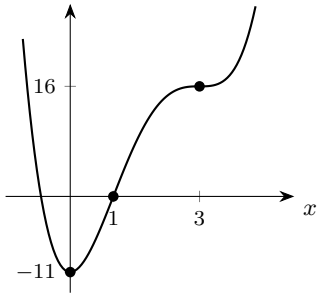
Étudier les variations et la convexité de $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 11$, puis tracer son graphe.

# Corrigé de l'exercice 1

**Corrigé**

$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x = 4x(x-3)^2$ : points critiques 0 et 3. $f' < 0$ pour $x < 0$, $f' > 0$ pour $x > 0$, $x \neq 3$ : $f$ décroît sur $]-\infty, 0]$, croît sur $[0, \infty[$. Min global $f(0) = -11$ ; en $x = 3$, $f'$ ne change pas de signe : ni max ni min ($f(3) = 16$).

$f''(x) = 12x^2 - 48x + 36 = 12(x-1)(x-3)$ : $f$ est convexe sur $]-\infty, 1[$, concave sur $]1, 3[$, convexe sur $]3, \infty[$. Points d'inflexion $(1, 0)$ et $(3, 16)$ (le second avec tangente horizontale). Terme dominant $x^4$ : les deux branches tendent vers $+\infty$.



# Exercice 2

**Exercice**

Étudier variations et convexité de a) $f(x) = x^7 - 7x$ ; b) $g(x) = x^{2/3}$.

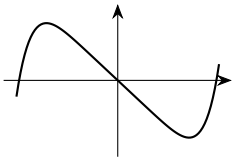
# Corrigé de l'exercice 2

## Corrigé

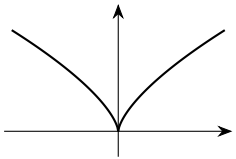
a) $f'(x) = 7(x^6 - 1)$ s'annule en $\pm 1$ ; $f' > 0$ pour $|x| > 1$, $f' < 0$ sur $]-1, 1[$. Max local $f(-1) = 6$, min local $f(1) = -6$. $f''(x) = 42x^5$ : concave sur $]-\infty, 0[$, convexe sur $]0, \infty[$, inflexion en $(0, 0)$. Zéros : $0$ et $\pm 7^{1/6}$. Pas d'extremum global (degré impair).

b) $g'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ n'est pas définie en $0$ : point critique. $g' < 0$ pour $x < 0$ et $g' > 0$ pour $x > 0$, donc $0$ est le min global ($g(0) = 0$), en un point anguleux (« point de rebroussement »). $g''(x) = -\frac{2}{9}x^{-4/3} < 0$ pour $x \neq 0$ : $g$ est concave sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$.

$x^7 - 7x$



$x^{2/3}$



# Exercice 3

**Exercice**

Tracer le graphe de $f(x) = \dfrac{16(x+1)}{(x-2)^2}$.

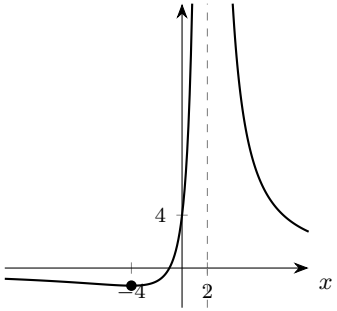
# Corrigé de l'exercice 3

**Corrigé**

Asymptote verticale $x = 2$ ; $f \to +\infty$ des deux côtés (numérateur $\to 48 > 0$). Asymptote horizontale $y = 0$ (degré $1 < 2$). Zéro $x = -1$ ; $f(0) = 4$.

$$f'(x) = \frac{-16(x+4)}{(x-2)^3}, \qquad f''(x) = \frac{32(x+7)}{(x-2)^4}.$$

$f' < 0$ sur $]-\infty, -4[$ et $]2, \infty[$, $f' > 0$ sur $]-4, 2[$ : min local $f(-4) = -\frac{4}{3}$ (c'est le min global). $f$ concave sur $]-\infty, -7[$, convexe sur $]-7, 2[$ et $]2, \infty[$ : inflexion en $\left(-7, -\frac{32}{27}\right)$.



# Exercice 4

**Exercice**

Tracer les graphes de a) $\dfrac{x}{x^2-1}$ ; b) $\dfrac{x}{x^2+1}$.

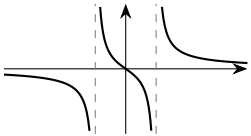
# Corrigé de l'exercice 4

**Corrigé**

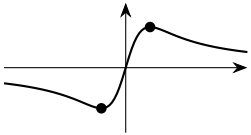
a) Asymptotes verticales $x = \pm 1$, horizontale $y = 0$ ;
fonction impaire. $f'(x) = -\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} < 0$ : $f$ décroît sur chacun des trois intervalles ; elle passe de $0^-$ à $-\infty$ sur $]-\infty, -1[$, de $+\infty$ à $-\infty$ sur $]-1, 1[$ (en passant par $0$), de $+\infty$ à $0^+$ sur $]1, \infty[$.

b) Définie sur $\mathbb{R}$ ; asymptote horizontale $y = 0$.
$g'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ : min global $g(-1) = -\frac{1}{2}$, max global $g(1) = \frac{1}{2}$.

$x/(x^2-1)$



$x/(x^2+1)$



# Exercice 5

**Exercice**

Trouver, s'ils existent, le max et le min globaux de $f$ sur $D_1$ et sur $D_2$ :
a) $1/x$ sur $]1,2[$ et $[1,2]$ ; c) $x^3-3x$ sur $[-4,-2]$ et $[0,\infty[$ ; e) $3x^5-5x^3$ sur $[-2,2]$ et $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ ; f) $x+1/x$ sur $]0,\infty[$ et $]-\infty,0[$.

# Corrigé de l'exercice 5

**Corrigé**

a) $1/x$ est strictement décroissante. Sur $]1,2[$ (ouvert) : ni max ni min. Sur $[1,2]$ : max $1$ en $x=1$, min $\frac{1}{2}$ en $x=2$.

c) $f'=3(x^2-1)>0$ sur $[-4,-2]$ : min $f(-4)=-52$, max $f(-2)=-2$. Sur $[0,\infty[$ : point critique $1$ ; $f(0)=0$, $f(1)=-2$, $f\to\infty$ : min global $-2$ en $x=1$, pas de max.

e) $f'=15x^2(x^2-1)$, points critiques $0,\pm1$ ; $f(-1)=2$, $f(1)=-2$, $f(0)=0$, $f(\pm2)=\pm56$. Sur $[-2,2]$ : max $56$ en $2$, min $-56$ en $-2$. Sur $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ : $f(\pm\sqrt{2})=\pm2\sqrt{2}\approx\pm2{,}83>2$ : max $2\sqrt{2}$ en $\sqrt{2}$, min $-2\sqrt{2}$ en $-\sqrt{2}$.

f) $f'=1-1/x^2$, $f''=2/x^3$. Sur $]0,\infty[$ : $f''>0$, unique point critique $1$ : min global $2$ (th. 3.6), pas de max. Sur $]-\infty,0[$ : $f''<0$ : max global $-2$ en $-1$, pas de min.

# Exercice 6

**Exercice**

1. Un fabricant produit des gadgets au coût unitaire de 5 \$. S'il les vend $x$ \$, il en vend $15 - x$. Fonction de profit ? Prix optimal ?
2. Un livre coûte 5 \$ à produire ; vendu 10 \$, il s'en vend 10 par jour, et chaque baisse de prix de 1 \$ fait vendre un exemplaire de plus. Demande, profit et prix optimal ?

# Corrigé de l'exercice 6

**Corrigé**

1. $\Pi(x) = (x-5)(15-x) = -x^2 + 20x - 75$ ; $\Pi'(x) = -2x + 20 = 0 \iff x = 10$ ; $\Pi'' = -2 < 0$ : max global. Prix $10$ \$, 5 gadgets vendus, profit $25$ \$.
2. Demande $q(x) = 10 + (10 - x) = 20 - x$ ;
   $\Pi(x) = (x-5)(20-x) = -x^2 + 25x - 100$ ;
   $\Pi'(x) = -2x + 25 = 0 \iff x = 12{,}5$ ; $\Pi'' = -2 < 0$. Prix $12{,}50$ \$, $7{,}5$ livres par jour, profit $7{,}5^2 = 56{,}25$ \$.

# Exercice 7

**Exercice**

Montrer que $C(x) = x^3 + x + 1$ a les propriétés d'une fonction de coût. Tracer $AC$ et $MC$ et comparer avec la figure 3.18.

# Corrigé de l'exercice 7

**Corrigé**

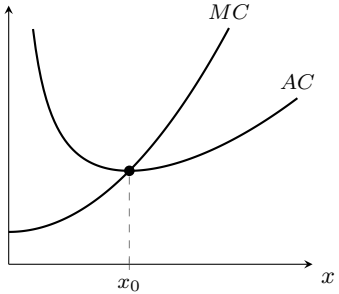
$C(0) = 1 > 0$ (coût fixe), $C'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ (croissante), $C''(x) = 6x \geq 0$ sur $[0, \infty[$.

$$AC(x) = x^2 + 1 + \frac{1}{x}, \qquad MC(x) = 3x^2 + 1.$$

$AC'(x) = 2x - \dfrac{1}{x^2} = 0 \iff x_0^3 = \frac{1}{2}$, soit $x_0 = 2^{-1/3} \approx 0{,}79$. Comme $1/x_0 = 2x_0^2$,

$$AC(x_0) = 3x_0^2 + 1 = MC(x_0) \approx 2{,}89,$$

conformément au théorème 3.7. $AC$ est en U ($AC'' > 0$) et $MC$ la coupe en son minimum, comme sur la figure 3.18.



# Exercice 8

**Exercice**

Que se passe-t-il pour une entreprise concurrentielle dont le coût marginal est partout **décroissant** ? Étudier $C(x) = 10 + 2\sqrt{x}$ au prix $p > 0$.

# Corrigé de l'exercice 8

**Corrigé**

Si $C'' < 0$, alors $\Pi''(x) = -C''(x) > 0$ : $\Pi$ est convexe et tout point critique est un **minimum** du profit (théorème 3.6), jamais un maximum. Ici $MC(x) = 1/\sqrt{x}$ est décroissant et

$$\Pi(x) = px - 10 - 2\sqrt{x}, \qquad \Pi'(x) = p - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \iff x = \frac{1}{p^2},$$

avec $\Pi''(x) = \frac{1}{2}x^{-3/2} > 0$ : $x = 1/p^2$ minimise le profit. Comme $\Pi(x) \to +\infty$ quand $x \to \infty$, il n'y a pas de production optimale finie : la règle « $p = MC$ » donne le **pire** niveau de production. D'où l'hypothèse de coût marginal croissant à l'optimum.

# Exercice 9

**Exercice**

1. Montrer que l'élasticité ponctuelle vaut exactement $-1$ au milieu de la droite de demande linéaire $x = a - bp$.
2. Calculer l'élasticité ponctuelle de $x = kp^{-r}$ et expliquer le nom de « demande à élasticité constante ».

# Corrigé de l'exercice 9

**Corrigé**

1. $\varepsilon = \dfrac{-bp}{a-bp} = -1 \iff bp = a - bp \iff p = \dfrac{a}{2b}$, et alors $x = \dfrac{a}{2}$ : c'est le milieu du segment joignant $(0, a)$ et $(a/b, 0)$. Pour $p < a/(2b)$ la demande est inélastique, pour $p > a/(2b)$ elle est élastique.
2. $F'(p) = -rkp^{-r-1}$, donc
$$\varepsilon = \frac{F'(p)\,p}{F(p)} = \frac{-rkp^{-r-1} \cdot p}{kp^{-r}} = -r,$$
indépendante de $p$ : l'élasticité est la même en tout point de la courbe de demande.

# Exercice 10

**Exercice**

Un monopole fait face à la demande $F(p) = a - bp$ et a pour coût $C(x) = kx^2$.
Calculer la production optimale et son prix.

# Corrigé de l'exercice 10

**Corrigé**

Demande inverse $p = \dfrac{a-x}{b}$, donc

$$R(x) = \frac{ax - x^2}{b}, \qquad MR(x) = \frac{a-2x}{b}, \qquad MC(x) = 2kx.$$

$MR = MC \iff a - 2x = 2kbx \iff$

$$x^* = \frac{a}{2(1+kb)}, \qquad p^* = \frac{a-x^*}{b} = \frac{a(1+2kb)}{2b(1+kb)}.$$

Second ordre : $\Pi''(x) = -\dfrac{2}{b} - 2k < 0$ : $\Pi$ est concave et $x^*$ est le max global (théorème 3.6). Si $k$ augmente (coûts plus élevés), $x^*$ diminue et $p^*$ augmente, comme l'indique la figure 3.21.