Mathématiques pour économistes – Chapitre 5

Exponentielles et logarithmes

Faïçal Lakhchen

Faculté d'Économie et de Gestion Nador, Université Mohammed Premier
https://faicallakhchen.github.io/ | f.lakhchen@ump.ac.ma

Octobre 2026

Où en sommes-nous ?

- Chap. 1 : Introduction
- Chap. 2 : Fonctions à une variable : fondements
- Chap. 3 : Fonctions à une variable : applications
- Chap. 4 : Dérivée d'une composée
- **Chap. 5 : Exponentielles et logarithmes**
- Chap. 6 : Introduction à l'algèbre linéaire
- Chap. 7 : Systèmes d'équations linéaires
- Chap. 8 : Algèbre matricielle
- Chap. 9 : Déterminants : approche élémentaire
- Chap. 10 : Espaces euclidiens
- Chap. 11 : Indépendance linéaire
- Chap. 12 : Limites et ensembles ouverts
- Chap. 13 : Fonctions de plusieurs variables
- Chap. 14 : Calcul différentiel à plusieurs variables
- Chap. 15 : Fonctions implicites et leurs dérivées
- Chap. 16 : Formes quadratiques et matrices définies
- Chap. 17 : Optimisation sans contrainte
- Chap. 18 : Optimisation sous contrainte I
- Chap. 19 : Optimisation sous contrainte II
- Chap. 20 : Fonctions homogènes et homothétiques
- Chap. 21 : Fonctions concaves et quasi-concaves
- Chap. 22 : Applications économiques de l'optimisation
- Chap. 23 : Valeurs propres et vecteurs propres
- Chap. 24 : Équations différentielles scalaires
- Chap. 25 : Systèmes d'équations différentielles
- Chap. 26 : Déterminants : les détails
- Chap. 27 : Sous-espaces associés à une matrice
- Chap. 28 : Applications de l'indépendance linéaire
- Chap. 29 : Limites et ensembles compacts
- Chap. 30 : Calcul à plusieurs variables II

Plan du chapitre

Fonctions exponentielles

Le nombre e

Logarithmes

Propriétés de exp et log

Dérivées de exp et log

Applications

Exercices corrigés

Objectif du chapitre

- Les trois chapitres précédents ne traitaient que de relations exprimées par des polynômes, des fonctions puissances ou des quotients de telles fonctions.
- Dans de nombreux modèles, la fonction qui décrit naturellement la croissance d'une variable économique ou financière au cours du temps fait apparaître le temps t en **exposant**, par exemple $f(t) = 2^t$: somme placée sur un compte rémunéré, dette d'un prêt immobilier à taux fixe après t années...
- Ce chapitre étudie les fonctions exponentielles et leurs dérivées, ainsi que leur réciproque, le **logarithme**, qui transforme les relations multiplicatives entre variables en relations additives, plus faciles à manipuler.
- Applications : valeur actuelle, annuités, durée optimale de détention, dérivée logarithmique et élasticité.

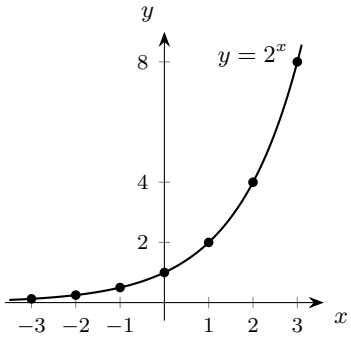
La fonction 2^x

- Jusqu'ici, toutes les fonctions étaient construites à partir des monômes ax^k (exposants entiers, fractionnaires, négatifs). On élargit cette classe aux fonctions où la variable x est en **exposant** : les **fonctions exponentielles**.
- Exemple : $f(x) = 2^x$, définie sur $\mathbb{R}$. Rappels :
  1. si x est un entier positif, 2^x signifie « multiplier 2 par lui-même x fois » ;
  2. si $x = 0$, $2^0 = 1$ par définition ;
  3. si $x = 1/n$, $2^{1/n} = \sqrt[n]{2}$, la racine n-ième de 2 ;
  4. si $x = m/n$, $2^{m/n} = \left(\sqrt[n]{2}\right)^m$, puissance m-ième de la racine n-ième de 2 ;
  5. si $x < 0$, 2^x signifie $1/2^{|x|}$, l'inverse de $2^{|x|}$.
- Le nombre 2 est la **base** de la fonction exponentielle.
- On ne sait pas encore dériver 2^x (sa dérivée n'est certainement pas $x2^{x-1}$) : pour tracer son graphe, on place des points.

Graphe de 2^x

x	2^x
-3	$1/8$
-2	$1/4$
-1	$1/2$
0	1
1	2
2	4
3	8

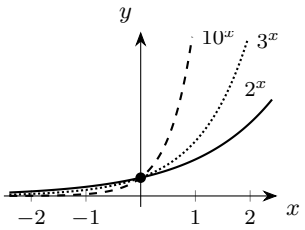
Tableau 5.1



Graphe de $y = 2^x$ (fig. 5.1)

- Le demi-axe des x négatifs est une **asymptote horizontale** ; contrairement aux fonctions rationnelles, le graphe ne l'approche que d'*un seul* côté.
- De l'autre côté, le graphe croît très vite : plus vite que *tout* polynôme, « exponentiellement vite ».

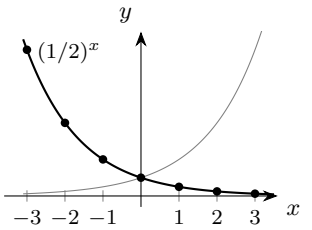
Autres bases



2^x, 3^x et 10^x (fig. 5.2)

x	$(1/2)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$1/2$
2	$1/4$
3	$1/8$

Tableau 5.2



$y = (1/2)^x$ et, en gris, 2^x (fig. 5.3)

- Les graphes de 2^x, 3^x, 10^x se ressemblent : plus la base est grande, plus le graphe se rapproche vite de l'axe d'un côté et plus il est raide de l'autre.
- Si $0 < b < 1$: la colonne y du tableau 5.2 est celle du tableau 5.1 à l'envers, car $(1/2)^x = 2^{-x}$. Le graphe de $(1/2)^x$ est le **symétrique** de celui de 2^x par rapport à l'axe des y ; $(1/3)^x$ et $(1/10)^x$ ont une allure semblable.
- **Pas de base négative** : $(-2)^x$ serait positive pour x entier pair, négative pour x impair, et changerait sans cesse de signe sans jamais s'annuler ; elle n'est d'ailleurs pas définie pour $x = 1/2$ (ni pour $x = p/q$ avec q pair). On n'utilise que a^x avec $a > 0$.

Intérêts composés

- On introduit la base la plus importante, le nombre irrationnel e, à partir de la situation économique la plus simple : un placement sur un compte d'épargne.
- On dépose A en début d'année au taux d'intérêt annuel simple r, sans dépôt ni retrait :
  - après un an : $A + rA = A(1 + r)$; chaque année, le montant est multiplié par $(1 + r)$;
  - après deux ans : $A(1 + r)(1 + r) = A(1 + r)^2$; après t ans : $A(1 + r)^t$.
- Si la banque compose les intérêts quatre fois par an (au taux $r/4$ à la fin de chaque trimestre) : $A + \frac{r}{4}A$ après un trimestre, $A\big(1 + \frac{r}{4}\big)^4$ après un an, $A\big(1 + \frac{r}{4}\big)^{4t}$ après t ans.
- Si les intérêts sont composés n fois par an : $A\big(1 + \frac{r}{n}\big)$ après la première période, $A\big(1 + \frac{r}{n}\big)^n$ après un an, $A\big(1 + \frac{r}{n}\big)^{nt}$ après t ans.
- Beaucoup de banques composent chaque jour ; d'autres annoncent une composition **continue**. Par quel facteur l'argent est-il multiplié en un an ? Mathématiquement : quelle est la limite de $\big(1 + \frac{r}{n}\big)^n$ quand $n \to \infty$?

Définition de e

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2,0
2	2,25
4	2,4414
10	2,59374
100	2,704814
1 000	2,7169239
10 000	2,7181459
100 000	2,71826824
10 000 000	2,718281693

Tableau 5.3

- Commençons par un taux annuel de $100\,\%$ ($r = 1$; certains pays ont connu de tels taux).
- La suite $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est croissante et converge vers un nombre un peu supérieur à $2{,}7$. Cette limite est un nombre **irrationnel** (ni fraction, ni développement décimal périodique), noté e :

$$e \equiv \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \qquad (1)$$

  À sept décimales, $e = 2{,}7182818\ldots$
- e joue en finance et en économie le rôle de π en géométrie. $f(x) = e^x$ est **la** fonction exponentielle, notée aussi $\exp(x)$. Comme $2 < e < 3$, son graphe a l'allure de ceux de la figure 5.2.

Composition continue au taux r

- Pour un taux $r > 0$ fixé, on pose $m = n/r$, soit $n = mr$; quand $n \to \infty$, $m \to \infty$. Comme $r/n = 1/m$,

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mr} = \left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)^r,$$

$$\text{donc} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = \left(\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)^r = e^r.$$

  On a utilisé la continuité de $x \mapsto x^r$: si $x_m \to x_0$, alors $x_m^r \to x_0^r$.

- Sur t années : $\lim\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = \left(\lim\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n\right)^t = (e^r)^t = e^{rt}$.

Théorème (5.1)

Quand $n \to \infty$, la suite $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ converge vers une limite notée e. De plus,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k.$$

Si l'on place A au taux annuel r composé continûment, le compte vaut Ae^{rt} après t années.

- Avantage de la composition fréquente : à $r = 100\,\%$, A devient $2A$ en un an sans composition, mais $eA > 2{,}7A$ avec composition continue : le compte a presque triplé.

Logarithme de base a

- Pour $a > 1$, $y = a^x$ est strictement croissante : $x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$. D'après le théorème 4.1, elle a une réciproque.
- Pour $f(x) = ax + b$ ($a > 0$), on obtient la réciproque en résolvant en x :

$$y = ax + b \iff x = \frac{1}{a}(y - b). \tag{2}$$

  La réciproque g « défait » f : $g(f(x)) = x$ (section 4.2).
- On ne peut pas résoudre explicitement $y = a^x$ en x comme en (2). Mais cette réciproque est assez importante pour recevoir un nom.

Définition

La réciproque de a^x est le **logarithme de base** a :

$$y = \log_a(z) \iff a^y = z.$$

Le logarithme de z est la puissance à laquelle il faut élever a pour obtenir z. Par définition,

$$a^{\log_a(z)} = z \qquad \text{et} \qquad \log_a(a^z) = z. \tag{3}$$

On écrit souvent $\log_a z$ sans parenthèses.

Logarithmes de base 10

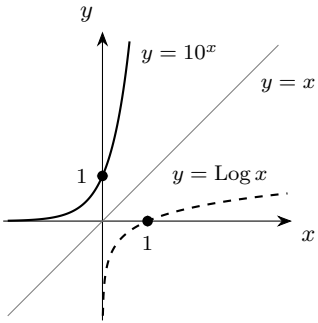
- Le logarithme de base 10 est si courant qu'on le note $y = \mathrm{Log}\, x$ (avec un L majuscule) : $y = \mathrm{Log}\, z \iff 10^y = z$.

Exemple (5.1)

$\mathrm{Log}\, 1000 = 3$ car $10^3 = 1000$; $\mathrm{Log}\, 0{,}01 = -2$ car $10^{-2} = 0{,}01$. De même :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Log}\, 10 = 1 && \text{car} \quad 10^1 = 10,\\
&\mathrm{Log}\, 100\,000 = 5 && \text{car} \quad 10^5 = 100\,000,\\
&\mathrm{Log}\, 1 = 0 && \text{car} \quad 10^0 = 1,\\
&\mathrm{Log}\, 625 = 2{,}79588\ldots && \text{car} \quad 10^{2{,}79588\ldots} = 625.
\end{aligned}$$

Pour la plupart des z, il faut une calculatrice ou une table.



Le graphe de $\mathrm{Log}\, x$ est le symétrique de celui de 10^x par rapport à la diagonale (fig. 5.4)

Graphe de $\operatorname{Log} x$; logarithme népérien

- On obtient le graphe de f^{-1} en échangeant les axes : (y, z) est sur le graphe de f^{-1} si et seulement si (z, y) est sur celui de f. Le graphe de $\operatorname{Log} x$ est donc le symétrique de celui de 10^x par rapport à $\{y = x\}$.
- Le demi-axe des x négatifs est asymptote horizontale de 10^x ; le demi-axe des y négatifs est donc asymptote **verticale** de $\operatorname{Log} x$.
- 10^x croît très vite, $\operatorname{Log} x$ très lentement : en $x = 1000$, $\operatorname{Log} x$ vaut seulement 3 ; en $x = 10^6$, seulement 6.
- $10^x > 0$ pour tout x : $\operatorname{Log} x$ n'est défini que pour $x > 0$. Son domaine est $\mathbb{R}_{++}$, l'ensemble des réels strictement positifs.

Définition

La fonction $\exp(x) = e^x$ a les mêmes propriétés que 10^x, donc une réciproque, le **logarithme népérien** (ou naturel), noté $\ln x$:

$$\ln x = y \iff e^y = x, \qquad \text{d'où} \qquad e^{\ln x} = x \quad \text{et} \quad \ln e^x = x. \tag{4}$$

Les graphes de e^x et $\ln x$ ressemblent à ceux de 10^x et $\operatorname{Log} x$ (fig. 5.4).

Exemple 5.2 : estimer des logarithmes népériens

Exemple (5.2)

$\ln 10$ est la puissance de e qui donne 10. Comme e est un peu inférieur à 3 et $3^2 = 9$, e^2 est un peu inférieur à 9 : il faut élever e à une puissance supérieure à 2 pour obtenir 10. Comme $3^3 = 27$, e^3 est un peu inférieur à 27. On s'attend donc à ce que $\ln 10$ soit entre 2 et 3, plutôt proche de 2. À la calculatrice, $\ln 10 = 2{,}3026$.

$$
\begin{aligned}
&\ln e = 1 && \text{car} \quad e^1 = e,\\
&\ln 1 = 0 && \text{car} \quad e^0 = 1,\\
&\ln 0{,}1 = -2{,}3025\ldots && \text{car} \quad e^{-2{,}3025\ldots} = 0{,}1,\\
&\ln 40 = 3{,}688\ldots && \text{car} \quad e^{3{,}688\ldots} = 40,\\
&\ln 2 = 0{,}6931\ldots && \text{car} \quad e^{0{,}6931\ldots} = 2.
\end{aligned}
$$

Exercice : cacher la colonne de droite et estimer ces logarithmes.

Cinq propriétés

Exponentielles

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$,
2. $a^{-r} = 1/a^r$,
3. $a^r / a^s = a^{r-s}$,
4. $(a^r)^s = a^{rs}$,
5. $a^0 = 1$.

Logarithmes

1. $\log(r \cdot s) = \log r + \log s$,
2. $\log(1/s) = -\log s$,
3. $\log(r/s) = \log r - \log s$,
4. $\log r^s = s \log r$,
5. $\log 1 = 0$.

- Les propriétés 1, 3 et 4 des exponentielles sont évidentes pour r, s entiers positifs. Les définitions $a^{-n} = 1/a^n$, $a^0 = 1$, $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ et $a^{m/n} = (a^{1/n})^m$ sont choisies pour que les cinq règles restent vraies pour *tous* réels r et s.
- Ces cinq propriétés des exponentielles se traduisent en cinq propriétés des logarithmes. La cinquième découle de $a^0 = 1$ et du fait que a^x et $\log_a$ sont réciproques.

Preuve des propriétés des logarithmes

On pose $u = \log_a r$ et $v = \log_a s$, soit $r = a^u$ et $s = a^v$. En utilisant $\log_a(a^x) = x$:

$$
\begin{aligned}
(1) \quad & \log(r \cdot s) = \log(a^u \cdot a^v) = \log(a^{u+v}) = u + v = \log r + \log s, \\
(2) \quad & \log(1/s) = \log(1/a^v) = \log(a^{-v}) = -v = -\log s, \\
(3) \quad & \log(r/s) = \log(a^u/a^v) = \log(a^{u-v}) = u - v = \log r - \log s, \\
(4) \quad & \log r^s = \log(a^u)^s = \log a^{us} = us = s \cdot \log r.
\end{aligned}
$$

- Les logarithmes sont particulièrement utiles pour « faire descendre » une variable x placée en exposant, où elle est plus facile à manipuler.

Exemples 5.3 et 5.4

Exemple (5.3)

Pour résoudre $2^{5x} = 10$, on prend le Log des deux membres : $\mathrm{Log}\, 2^{5x} = \mathrm{Log}\, 10$, soit $5x \cdot \mathrm{Log}\, 2 = 1$. Donc $x = \dfrac{1}{5\,\mathrm{Log}\, 2} \approx 0{,}6644$. On aurait pu utiliser $\ln$ au lieu de Log.

Exemple (5.4 : temps de doublement)

Combien de temps faut-il pour que A placé au taux r composé continûment double ? On résout

$$2A = Ae^{rt} \tag{5}$$

en t. On divise par A (le temps de doublement ne dépend pas de la somme placée, comme l'intuition le suggère), puis on prend le $\ln$: $\ln 2 = \ln e^{rt} = rt$ (6), soit $t = (\ln 2)/r$.
Comme $\ln 2 \approx 0{,}69$: diviser 69 par le taux en pourcentage. À $10\,\%$: $69/10 = 6{,}9$ ans ; à $8\,\%$: $69/8 = 8{,}625$ ans. C'est aussi le temps de doublement du niveau des prix avec une inflation constante de $8\,\%$.

Demande à élasticité constante

- Comme en section 3.6, on étudie souvent la relation entre le prix p et la quantité demandée q avec la famille à deux paramètres des **fonctions de demande à élasticité constante**

$$q = kp^{\varepsilon},$$

où k et ε dépendent du bien étudié.

- Le paramètre le plus intéressant est ε, égal à l'élasticité $\dfrac{p}{q}\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}$.
- En prenant le logarithme des deux membres :

$$\ln q = \ln kp^{\varepsilon} = \ln k + \varepsilon \ln p. \tag{7}$$

- En **coordonnées logarithmiques**, la demande devient une fonction **linéaire**, dont la pente est l'élasticité ε.

Théorème 5.2

Théorème (5.2)

Les fonctions e^x et $\ln x$ sont continues sur leur domaine et ont des dérivées continues de tout ordre. Leurs dérivées premières sont

$$(a)\ \ (e^x)' = e^x, \qquad\qquad (b)\ \ (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Si $u(x)$ est une fonction dérivable,

$$(c)\ \ \left(e^{u(x)}\right)' = e^{u(x)} \cdot u'(x), \qquad\qquad (d)\ \ \left(\ln u(x)\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \textit{si } u(x) > 0.$$

- On le prouve par étapes. La continuité de l'exponentielle est intuitive : son graphe (fig. 5.4) n'a ni saut ni trou. Le graphe de $\ln x$, symétrique de celui de e^x par rapport à la diagonale, n'en a pas non plus : $\ln x$ est continue sur $\mathbb{R}_{++}$.
- Il est plus facile de calculer d'abord la dérivée du logarithme.

Lemme 5.1 : dérivée de $\ln x$

Lemme (5.1)

Sachant que $y = \ln x$ est continue sur $\mathbb{R}_{++}$, elle est dérivable et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Preuve. On part du quotient qui définit la dérivée et on le simplifie avec les propriétés du logarithme. Pour $x > 0$ fixé :

$$\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{h} \ln\Big(\frac{x+h}{x}\Big) = \ln\Big(1 + \frac{h}{x}\Big)^{1/h} = \ln\Big(1 + \frac{1/x}{1/h}\Big)^{1/h}.$$

Posons $m = 1/h$; quand $h \to 0$, $m \to \infty$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{m\to\infty} \ln\Big(1 + \frac{1/x}{m}\Big)^m = \ln \lim_{m\to\infty} \Big(1 + \frac{1/x}{m}\Big)^m = \ln e^{1/x} = \frac{1}{x},$$

par le théorème 5.1. On peut échanger $\ln$ et $\lim$ car $\ln$ est continue : $x_m \to x_0$ implique $\ln x_m \to \ln x_0$, soit $\lim_m(\ln x_m) = \ln(\lim_m x_m)$. ■

Lemmes 5.2 et 5.3

Les trois autres conclusions du théorème 5.2 découlent de la règle de la chaîne.

Lemme (5.2)

Si $h(x)$ est une fonction dérivable et positive, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\ln h(x)\big) = \dfrac{h'(x)}{h(x)}$.

Preuve. Règle de la chaîne pour $f(x) = \ln h(x)$: la dérivée de la fonction extérieure $\ln y$, soit $1/y$, évaluée en $h(x)$, fois la dérivée $h'(x)$ de la fonction intérieure : $(\ln h(x))' = \frac{1}{h(x)} \cdot h'(x)$. ■

Lemme (5.3)

$(e^x)' = e^x$.

Preuve. Par (4), $\ln e^x = x$. On dérive les deux membres avec le lemme précédent : $(\ln e^x)' = \frac{1}{e^x} \cdot (e^x)' = 1$, donc $(e^x)' = e^x$. ■

Enfin, pour (c), on applique la règle de la chaîne à $y = e^{u(x)}$: la fonction extérieure e^z a pour dérivée e^z, qui, évaluée en l'intérieur, vaut $e^{u(x)}$; d'où $\big(e^{u(x)}\big)' = e^{u(x)}u'(x)$.

Exemple 5.5

Exemple (5.5)

Avec le théorème 5.2 :

(a) $(e^{5x})' = 5e^{5x}$,

(b) $(Ae^{kx})' = Ake^{kx}$,

(c) $\left(5e^{x^2}\right)' = 10xe^{x^2}$,

(d) $(e^x \ln x)' = e^x \ln x + \dfrac{e^x}{x}$,

(e) $(\ln x^2)' = \dfrac{1}{x^2} \cdot 2x = \dfrac{2}{x}$,

(f) $\left((\ln x)^2\right)' = \dfrac{2\ln x}{x}$,

(g) $(xe^{3-x})' = e^{3-x} - xe^{3-x} = (1-x)e^{3-x}$,

(h) $\left(\ln(x^2+3x+1)\right)' = \dfrac{2x+3}{x^2+3x+1}$.

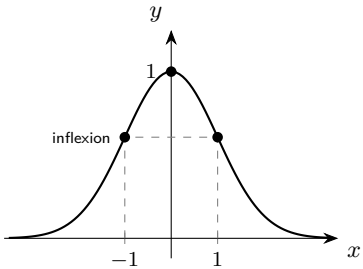
Exemple 5.6 : la courbe en cloche

La densité de la loi **normale** centrée réduite est $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Étudions sa partie essentielle $g(x) = e^{-x^2/2}$.

- $g > 0$: son graphe est au-dessus de l'axe des x.
- $g'(x) = -xe^{-x^2/2}$; comme $e^{-x^2/2} > 0$, $g'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$, avec $g(0) = 1$. $g' > 0$ pour $x < 0$ et $g' < 0$ pour $x > 0$: g croît puis décroît, et $(0, 1)$ est un max global.
- $g''(x) = (-xe^{-x^2/2})' = x^2 e^{-x^2/2} - e^{-x^2/2} = (x^2 - 1)e^{-x^2/2}$, du signe de $x^2 - 1$:

$$g''(0) < 0 \quad \text{et} \quad g''(x) = 0 \iff x = \pm 1. \tag{8}$$

  $g'' > 0$ sur $]-\infty, -1[$ et $]1, \infty[$, $g'' < 0$ sur $]-1, 1[$: g est convexe, puis concave, puis convexe ; points d'inflexion $(-1, e^{-1/2})$ et $(1, e^{-1/2})$.
- C'est la courbe en cloche des probabilités. Comme $f = (2\pi)^{-1/2} g \approx 0{,}39\, g$, le graphe de f est semblable, mais aplati vers l'axe des x.



Graphe de $e^{-x^2/2}$ (fig. 5.5)

Dérivée de b^x

Théorème (5.3)

Pour toute base $b > 0$ fixée,

$$(b^x)' = (\ln b)(b^x). \tag{9}$$

Preuve. Comme $b = e^{\ln b}$, on a $b^x = \left(e^{\ln b}\right)^x = e^{(\ln b)x}$. Par l'exemple 5.5 b),

$$(b^x)' = \left(e^{(\ln b)\cdot x}\right)' = (\ln b)\left(e^{(\ln b)\cdot x}\right) = (\ln b)(b^x). \qquad \blacksquare$$

Exemple (5.7)

$(10^x)' = (\ln 10)(10^x)$.

- $(b^x)' = b^x$ si et seulement si $\ln b = 1$, c'est-à-dire $b = e$. En fait, les fonctions $y = ke^x$ sont les *seules* fonctions égales à leur dérivée sur tout leur domaine : autre raison de considérer e comme la base **naturelle** des exponentielles.

Valeur actuelle

- De nombreux problèmes comparent des sommes à des dates différentes (analyse coûts–bénéfices d'un barrage : coût de construction cette année, coûts d'entretien et bénéfices futurs). On ramène toutes les sommes au présent : c'est la **valeur actuelle**.
- Placés à intérêts composés continûment au taux r, A euros deviennent après t ans (théorème 5.1)
$$B = Ae^{rt}. \tag{10}$$
Pour obtenir B dans t ans, il faut placer aujourd'hui $A = Be^{-rt}$ (on résout (10) en A) : Be^{-rt} est la **valeur actuelle** (VA) de B euros dans t ans (au taux r).
- Avec composition **annuelle** : A devient $B = A(1+r)^t$, et la valeur actuelle de B dans t ans est $B/(1+r)^t = B(1+r)^{-t}$. Cela n'a de sens que pour t entier, et e^{rt} est plus simple à manipuler : on utilisera surtout la composition continue.
- Valeur actuelle d'un **flux** de paiements : B_1 dans t_1 ans, B_2 dans t_2 ans, ..., B_n dans t_n ans :
$$VA = B_1e^{-rt_1} + B_2e^{-rt_2} + \cdots + B_ne^{-rt_n}. \tag{11}$$

Annuités (composition continue)

- Une **annuité** est une suite de paiements égaux à intervalles réguliers pendant une durée donnée. La valeur actuelle d'une annuité qui verse A à la fin de chacune des N prochaines années, au taux r composé continûment, est

$$VA = Ae^{-r\cdot 1} + Ae^{-r\cdot 2} + \cdots + Ae^{-r\cdot N} = A\big(e^{-r} + e^{-r\cdot 2} + \cdots + e^{-r\cdot N}\big). \tag{12}$$

- Comme $(a + \cdots + a^n)(1 - a) = a - a^{n+1}$ (facile à vérifier),

$$a + \cdots + a^n = \frac{a(1 - a^n)}{1 - a}. \tag{13}$$

- Avec $a = e^{-r}$ et $n = N$ dans (12) :

$$VA = A \cdot \frac{e^{-r}(1 - e^{-rN})}{1 - e^{-r}} = \frac{A(1 - e^{-rN})}{e^r - 1}. \tag{14}$$

- Annuité qui verse A par an **à perpétuité** : on fait $N \to \infty$ dans (14) ; comme $e^{-rN} \to 0$,

$$VA = \frac{A}{e^r - 1}. \tag{15}$$

Annuités (composition annuelle)

- Avec composition **annuelle**, (12) devient

$$VA = \frac{A}{1+r} + \cdots + \frac{A}{(1+r)^N}.$$

- On applique (13) avec $a = 1/(1+r)$ et $n = N$:

$$VA = A \cdot \frac{1/(1+r)}{r/(1+r)}\Big(1 - \Big(\frac{1}{1+r}\Big)^N\Big) = \frac{A}{r}\Big(1 - \Big(\frac{1}{1+r}\Big)^N\Big). \qquad (16)$$

- Pour une rente perpétuelle de A par an, on fait $N \to \infty$ dans (16) :

$$VA = \frac{A}{r}. \qquad (17)$$

- Intuition de (17) : pour tirer indéfiniment A euros par an d'un compte rémunéré au taux annuel r, il faut y déposer initialement A/r euros.

Durée optimale de détention

- Vous possédez un bien immobilier qui vaudra $V(t)$ euros dans t ans. Si le taux d'intérêt reste r, la valeur actuelle d'une vente à la date t est $V(t)e^{-rt}$. La date de vente optimale t_0 maximise cette valeur actuelle. Condition du premier ordre :

$$\left(V(t)e^{-rt}\right)' = V'(t)e^{-rt} - rV(t)e^{-rt} = 0, \quad \text{soit} \quad \frac{V'(t)}{V(t)} = r \ \text{ en } t = t_0. \tag{18}$$

- (18) est la condition de **durée optimale de détention**. Le membre de gauche est le taux de variation de V divisé par V : le **taux de variation relatif**, ou **taux de croissance**. Le membre de droite, le taux d'intérêt, est le taux de croissance de l'argent placé.
- Tant que le bien croît plus vite que l'argent placé, on le garde. Dès que l'argent placé a un taux de croissance supérieur, mieux vaut vendre et placer le produit au taux r. Le basculement a lieu quand les deux taux sont égaux, ce que dit (18).
- Même principe pour un négociant qui décide quand vendre une caisse de vin qui se bonifie, ou une société forestière qui décide quand couper ses arbres.

Exemple 5.8

Exemple (5.8)

Un bien immobilier vaudra $V(t) = 10\,000\, e^{\sqrt{t}}$ dans t ans. Le taux d'intérêt restant à $6\,\%$, la date de vente optimale maximise

$$F(t) = 10\,000\, e^{\sqrt{t}} e^{-0{,}06t} = 10\,000\, e^{\sqrt{t}-0{,}06t}.$$

Condition du premier ordre :

$$0 = F'(t) = 10\,000\, e^{\sqrt{t}-0{,}06t}\Big(\frac{1}{2\sqrt{t}} - 0{,}06\Big),$$

vraie si et seulement si

$$\frac{1}{2\sqrt{t_0}} = 0{,}06 \qquad \text{soit} \qquad t_0 = \Big(\frac{1}{0{,}12}\Big)^2 \approx 69{,}44.$$

Comme $F'(t) > 0$ pour $0 < t < t_0$ et $F'(t) < 0$ pour $t > t_0$, $t_0 \approx 69{,}44$ est bien le **max global** de la valeur actuelle : c'est la date de vente optimale.

Dérivée logarithmique ; exemple 5.9

- Le logarithme transforme puissances en produits, produits en sommes, quotients en différences : il simplifie souvent la dérivation d'une fonction compliquée. Par le lemme 5.2, $(\ln u(x))' = u'(x)/u(x)$, donc
$$u'(x) = \big(\ln u(x)\big)' \cdot u(x). \tag{19}$$
Si $\ln u(x)$ est plus simple que $u(x)$, (19) donne u' plus facilement qu'un calcul direct.

Exemple (5.9)

Dérivons $y = \dfrac{\sqrt[4]{x^2-1}}{x^2+1}$ (20). Son logarithme est $\ln\Big(\dfrac{\sqrt[4]{x^2-1}}{x^2+1}\Big) = \dfrac{1}{4}\ln(x^2-1) - \ln(x^2+1)$ (21), bien plus simple à dériver :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln y = \frac{1}{4}\cdot\frac{2x}{x^2-1} - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{-3x^3+5x}{2(x^2-1)(x^2+1)}.$$

Par (19) :

$$y' = \frac{-3x^3+5x}{2(x^2-1)(x^2+1)}\cdot\frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{x^2+1} = \frac{-3x^3+5x}{2(x^2-1)^{3/4}(x^2+1)^2}.$$

Exemple 5.10 ; coordonnées logarithmiques

Exemple (5.10)

Un classique, que cette méthode règle en une ligne : la dérivée de $g(x) = x^x$ $(x > 0)$, qui n'est ni une puissance ni une exponentielle. Comme $(\ln x^x)' = (x \ln x)' = \ln x + 1$, (19) donne $(x^x)' = (\ln x + 1) \cdot x^x$.

- On étudie parfois $y = f(x)$ en comparant $\ln y$ et $\ln x$ (papier log-log), comme pour la demande à élasticité constante (7). On change de variables : $Y = \ln y$ et $X = \ln x$. Comme $x = e^X$, $\mathrm{d}x/\mathrm{d}X = e^X = x$, et

$$Y = \ln f(x) = \ln f(e^X) \equiv F(X).$$

- Pente du graphe de f en coordonnées log-log (règle de la chaîne) :

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}X} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\ln f(x)\big) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}X} = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x. \tag{22}$$

Élasticité et coordonnées log-log

- L'approximation par différences du dernier terme de (22) est

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{x}{f(x)} \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{x}{f(x)} = \frac{\Delta f}{f(x)} \Big/ \frac{\Delta x}{x} :$$

  la variation en pourcentage de f rapportée à la variation en pourcentage de x. C'est l'**élasticité** (ponctuelle) de f par rapport à x, en particulier si f est une fonction de demande et x un prix ou un revenu.

- La pente du graphe de f en coordonnées log-log est donc l'élasticité de f :

$$\varepsilon = \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)}.$$

- C'est pourquoi les économistes écrivent parfois l'élasticité

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}(\ln f)}{\mathrm{d}(\ln x)}.$$

Exercice 1

Exercice

1. Calculer : 2^3, 2^{-3}, $8^{1/3}$, $8^{2/3}$, $8^{-2/3}$, π^0, $64^{-5/6}$, $625^{3/4}$, $25^{-5/2}$.
2. Donner sans calculatrice : $\operatorname{Log} 10$, $\operatorname{Log} 0{,}001$, $\operatorname{Log}(\text{milliard})$, $\log_2 8$, $\log_6 36$, $\log_5 0{,}2$, $\ln(e^2)$, $\ln\sqrt{e}$, $\ln 1$.

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé

1. $2^3 = 8$; $2^{-3} = \frac{1}{8}$; $8^{1/3} = 2$; $8^{2/3} = 2^2 = 4$; $8^{-2/3} = \frac{1}{4}$; $\pi^0 = 1$;
   $64^{-5/6} = (64^{1/6})^{-5} = 2^{-5} = \frac{1}{32}$; $625^{3/4} = (625^{1/4})^3 = 5^3 = 125$;
   $25^{-5/2} = 5^{-5} = \frac{1}{3125}$.
2. $\mathrm{Log}\, 10 = 1$; $\mathrm{Log}\, 0{,}001 = -3$; $\mathrm{Log}(10^9) = 9$; $\log_2 8 = 3$; $\log_6 36 = 2$; $\log_5 0{,}2 = -1$
   (car $5^{-1} = 0{,}2$) ; $\ln(e^2) = 2$; $\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$; $\ln 1 = 0$.

Exercice 2

Exercice

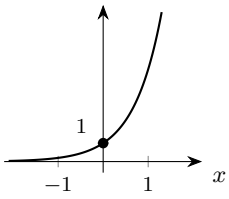
Tracer le graphe de : a) $y = 5^x$; b) $y = 0{,}2^x$; c) $y = 3 \cdot 5^x$; d) $y = 1^x$.

Corrigé de l'exercice 2

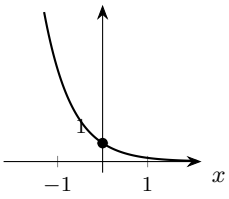
Corrigé

a) croît plus vite que 2^x, passe par $(0,1)$; b) $0{,}2^x = 5^{-x}$: symétrique de a) par rapport à l'axe des y ; c) graphe de a) dilaté verticalement d'un facteur 3, passe par $(0,3)$; d) $1^x = 1$: fonction constante.

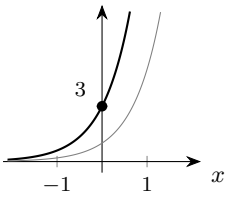
a) 5^x



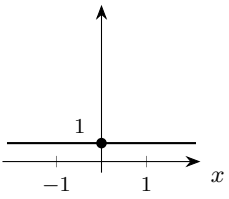
b) $0{,}2^x$



c) $3 \cdot 5^x$



d) 1^x



Exercice 3

Exercice

Estimer d'abord sans calculatrice, puis calculer à quatre décimales : a) $\operatorname{Log} 500$; b) $\operatorname{Log} 5$; c) $\operatorname{Log} 1234$; d) $\operatorname{Log} e$; e) $\ln 30$; f) $\ln 100$; g) $\ln 3$; h) $\ln \pi$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé

a) $100 < 500 < 1000$: entre 2 et 3 ; $\operatorname{Log} 500 = 2{,}6990$. b) entre 0 et 1 : $\operatorname{Log} 5 = 0{,}6990$ (et $\operatorname{Log} 500 = 2 + \operatorname{Log} 5$).

c) un peu plus de 3 : $\operatorname{Log} 1234 = 3{,}0913$. d) $1 < e < 10$: $\operatorname{Log} e = 0{,}4343$.

e) $e^3 \approx 20 < 30 < e^4 \approx 55$: $\ln 30 = 3{,}4012$. f) $\ln 100 = 2 \ln 10 = 4{,}6052$.

g) 3 est un peu plus grand que e : $\ln 3 = 1{,}0986$. h) π un peu plus grand que 3 : $\ln \pi = 1{,}1447$.

Exercice 4

Exercice

Résoudre en x : a) $2e^{6x} = 18$; b) $e^{x^2} = 1$; c) $2^x = e^5$; d) $2^{x-2} = 5$; e) $\ln x^2 = 5$; f) $\ln x^{5/2} - 0{,}5 \ln x = \ln 25$.

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé

a) $e^{6x} = 9 \iff 6x = \ln 9 \iff x = \frac{\ln 3}{3} \approx 0{,}3662.$

b) $x^2 = \ln 1 = 0 \iff x = 0.$

c) $x \ln 2 = 5 \iff x = \frac{5}{\ln 2} \approx 7{,}213.$

d) $(x-2)\ln 2 = \ln 5 \iff x = 2 + \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 4{,}322.$

e) $x^2 = e^5 \iff x = \pm e^{5/2} \approx \pm 12{,}18.$

f) $\frac{5}{2}\ln x - \frac{1}{2}\ln x = 2\ln x = \ln 25 = 2\ln 5$, donc $x = 5$.

Exercice 5

Exercice

1. Donner une formule pour le temps nécessaire au triplement d'un capital placé au taux r composé continûment.
2. En combien de temps 500 \$ deviennent-ils 600 \$ au taux de $5\,\%$ composé continûment ?

Corrigé de l'exercice 5

Corrigé

1. $3A = Ae^{rt} \iff \ln 3 = rt \iff t = \dfrac{\ln 3}{r} \approx \dfrac{1{,}0986}{r}$: environ 110 divisé par le taux en pourcentage (comparer à la règle du 69 pour le doublement).
2. $600 = 500\, e^{0{,}05t} \iff e^{0{,}05t} = 1{,}2 \iff t = \dfrac{\ln 1{,}2}{0{,}05} = 20 \ln 1{,}2 \approx 3{,}65$ ans.

Exercice 6

Exercice

Calculer les dérivées première et seconde de : a) xe^{3x} ; b) e^{x^2+3x-2} ; c) $\ln(x^4+2)^2$; d) $\dfrac{x}{e^x}$; e) $\dfrac{x}{\ln x}$; f) $\dfrac{\ln x}{x}$.

Corrigé de l'exercice 6

Corrigé

a) $f' = e^{3x} + 3xe^{3x} = (1+3x)e^{3x}$; $f'' = 3e^{3x} + 3(1+3x)e^{3x} = (6+9x)e^{3x}$.

b) $f' = (2x+3)e^{x^2+3x-2}$; $f'' = \big(2 + (2x+3)^2\big)e^{x^2+3x-2}$.

c) $f = 2\ln(x^4+2)$: $f' = \dfrac{8x^3}{x^4+2}$; $f'' = \dfrac{24x^2(x^4+2) - 8x^3 \cdot 4x^3}{(x^4+2)^2} = \dfrac{8x^2(6-x^4)}{(x^4+2)^2}$.

d) $f = xe^{-x}$: $f' = (1-x)e^{-x}$; $f'' = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$.

e) $f' = \dfrac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$; $f'' = \dfrac{\frac{1}{x}(\ln x)^2 - (\ln x - 1)\frac{2\ln x}{x}}{(\ln x)^4} = \dfrac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3}$.

f) $f' = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$; $f'' = \dfrac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x)2x}{x^4} = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$.

Exercice 7

Exercice

Tracer le graphe de : a) xe^x ; b) xe^{-x} ; c) $\cosh x \equiv (e^x + e^{-x})/2$.

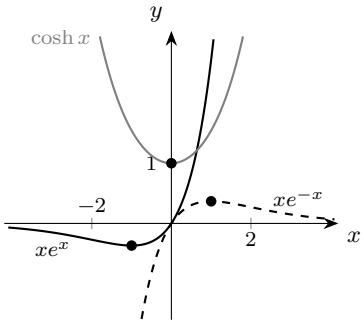
Corrigé de l'exercice 7

Corrigé

a) $f' = (1+x)e^x$: décroissante sur $]-\infty, -1]$, croissante ensuite ; min global $-1/e$ en -1.
$f'' = (2+x)e^x$: inflexion en $(-2, -2e^{-2})$. $f \to 0$ en $-\infty$ (asymptote $y = 0$), $f \to +\infty$ en $+\infty$.

b) $f' = (1-x)e^{-x}$: max global $1/e$ en 1.
$f'' = (x-2)e^{-x}$: inflexion en $(2, 2e^{-2})$. $f \to 0$ en $+\infty$, $f \to -\infty$ en $-\infty$.

c) fonction paire, $f' = (e^x - e^{-x})/2$ s'annule en 0 seulement ; $f'' = \cosh x > 0$: convexe partout, min global 1 en 0 (théorème 3.6).



Exercice 8

Exercice

À l'aide de l'égalité $10^{\operatorname{Log} x} = x$, de l'exemple 5.7 et de la méthode de la preuve du lemme 5.3, trouver la dérivée de $y = \operatorname{Log} x$.

Corrigé de l'exercice 8

Corrigé

On dérive les deux membres de $10^{\operatorname{Log} x} = x$. Par l'exemple 5.7, $(10^z)' = (\ln 10)\, 10^z$, et par la règle de la chaîne :

$$(\ln 10)\, 10^{\operatorname{Log} x} \cdot (\operatorname{Log} x)' = 1, \qquad \text{soit} \qquad (\ln 10)\, x \cdot (\operatorname{Log} x)' = 1.$$

Donc

$$(\operatorname{Log} x)' = \frac{1}{x \ln 10} \approx \frac{0{,}4343}{x}.$$

Plus généralement, $(\log_b x)' = \dfrac{1}{x \ln b}$.

Exercice 9

Exercice

1. Au taux annuel de $10\,\%$, qu'est-ce qui a la plus grande valeur actuelle : a) 215 \$ dans deux ans ; b) 100 \$ à la fin de chacune des deux prochaines années ; c) 100 \$ aujourd'hui et 95 \$ dans deux ans ?
2. Au taux de $10\,\%$ composé continûment, quelle est la valeur actuelle d'une annuité de 500 \$ par an a) pendant cinq ans ; b) à perpétuité ?

Corrigé de l'exercice 9

Corrigé

1. (composition annuelle) a) $\frac{215}{1{,}21} \approx 177{,}69$; b) $\frac{100}{1{,}1} + \frac{100}{1{,}21} \approx 90{,}91 + 82{,}64 = 173{,}55$; c) $100 + \frac{95}{1{,}21} \approx 100 + 78{,}51 = 178{,}51$. L'option c) a la plus grande valeur actuelle.

2. a) par (14) : $VA = \dfrac{500\,(1 - e^{-0{,}5})}{e^{0{,}1} - 1} = \dfrac{500 \times 0{,}39347}{0{,}10517} \approx 1\,870{,}6$ \$; b) par (15) : $VA = \dfrac{500}{e^{0{,}1} - 1} \approx 4\,754$ \$.

Exercice 10

Exercice

1. Un livre rare vaudra $B(t) = 2^{\sqrt{t}}$ dans t ans. Le taux d'intérêt étant de $5\,\%$, quand faut-il le vendre ?
2. Un négociant possède une caisse de vin vendable $Ke^{\sqrt{t}}$ dans t ans. Sans coût de stockage et au taux r, quand doit-il la vendre ?
3. Un terrain acheté pour spéculer vaut $V = 2000\, e^{t^{1/4}}$. Le taux d'intérêt étant de $10\,\%$, combien de temps faut-il le garder pour maximiser la valeur actuelle ?

Corrigé de l'exercice 10

Corrigé

Par (18), on vend quand le taux de croissance $V'/V = (\ln V)'$ égale r.

1. $\ln B = \sqrt{t}\,\ln 2$, $(\ln B)' = \dfrac{\ln 2}{2\sqrt{t}} = 0{,}05 \iff \sqrt{t} = 10\ln 2 \approx 6{,}931 \iff t \approx 48{,}0$ ans.
2. $(\ln V)' = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} = r \iff t = \dfrac{1}{4r^2}$ (exemple 5.8 avec $r = 0{,}06$: $69{,}44$ ans).
3. $\ln V = \ln 2000 + t^{1/4}$, $(\ln V)' = \frac{1}{4}t^{-3/4} = 0{,}1 \iff t^{3/4} = 2{,}5 \iff t = 2{,}5^{4/3} \approx 3{,}39$ ans.

Exercice 11

Exercice

1. Par la dérivée logarithmique, dériver a) $\sqrt{(x^2+1)/(x^2+4)}$; b) $(x^2)^{x^2}$.
2. Montrer que l'élasticité d'un produit de deux fonctions est la somme de leurs élasticités.

Corrigé de l'exercice 11

Corrigé

1. a) $\ln y = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+4)$, donc $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{x}{x^2+1} - \dfrac{x}{x^2+4} = \dfrac{3x}{(x^2+1)(x^2+4)}$ et $y' = \dfrac{3x}{(x^2+1)^{1/2}(x^2+4)^{3/2}}$.

   b) $\ln y = x^2 \ln x^2$, donc $\dfrac{y'}{y} = 2x\ln x^2 + x^2 \cdot \dfrac{2x}{x^2} = 2x(1+\ln x^2)$ et $y' = 2x(1+\ln x^2)(x^2)^{x^2}$.

2. Avec $\varepsilon = \dfrac{\mathrm{d}(\ln f)}{\mathrm{d}(\ln x)}$: $\varepsilon_{fg} = \dfrac{\mathrm{d}\ln(fg)}{\mathrm{d}\ln x} = \dfrac{\mathrm{d}(\ln f + \ln g)}{\mathrm{d}\ln x} = \varepsilon_f + \varepsilon_g$.