# Microéconomie – Chapitre 3

## Fonction d'utilité

Faïçal Lakhchen

Faculté d'Économie et de Gestion Nador, Université Mohammed Premier
https://faicallakhchen.github.io/ | f.lakhchen@ump.ac.ma

# Question

*Un consommateur préfère le panier* $(10\,;\,5)$ *au panier* $(5\,;\,10)$. *Peut-on dire de combien ?*

# Où en sommes-nous ?

- Chap. 1 : Offre et demande sur le marché
- Chap. 2 : Contrainte budgétaire et préférences du consommateur
- **Chap. 3 : Fonction d'utilité**
- Chap. 4 : Équilibre et choix du consommateur
- Chap. 5 : Fonctions de demande et élasticités
- Chap. 6 : Taxes, subventions et changement des préférences
- Chap. 7 : Effet de revenu et effets de substitution
- Chap. 8 : Surplus du consommateur
- Chap. 9 : De la demande individuelle à la demande du marché
- Chap. 10 : Choix intertemporel
- Chap. 11 : Incertitude
- Chap. 12 : Technologie et fonction de production
- Chap. 13 : Minimisation des coûts
- Chap. 14 : Courbes de coûts
- Chap. 15 : Maximisation du profit
- Chap. 16 : Offre individuelle et offre de marché
- Chap. 17 : Le marché de concurrence parfaite
- Chap. 18 : Le monopole
- Chap. 19 : Le duopole
- Chap. 20 : L'oligopole

# Pourquoi une fonction d'utilité ?

- Les courbes d'indifférence **classent** les paniers : suffisant pour un graphique.
- Pour **calculer** un choix, on veut une *fonction* : $(x_1, x_2) \mapsto U(x_1, x_2)$.
- Ce chapitre : construire l'outil, puis retrouver le **TMS** par des dérivées.

# Fonction d'utilité

**Définition (Fonction d'utilité)**

Une *fonction d'utilité* $U(x_1, x_2)$ *représente* les préférences $\succsim$ si, pour tous paniers $X$ et $Y$,

$$X \succsim Y \iff U(X) \geq U(Y).$$

En particulier, $X \succ Y \iff U(X) > U(Y)$ et $X \sim Y \iff U(X) = U(Y)$.

# Une fonction d'utilité

**Exemple (Une fonction d'utilité)**

Supposons que les préférences d'un consommateur soient représentées par $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Alors $U(10\,;\,5) = 50$, $U(5\,;\,10) = 50$ : il est indifférent entre ces deux paniers. Par ailleurs $U(7\,;\,7) = 49 < 50$ : il préfère $(10\,;\,5)$ à $(7\,;\,7)$. Et $U(10\,;\,10) = 100$ : ce dernier panier est strictement préféré.

# Outil mathématique : transformation monotone

**Outil mathématique : fonction croissante et transformation monotone**

Une fonction $f$ est *strictement croissante* si $a > b \Rightarrow f(a) > f(b)$. Si $U$ représente des préférences et $f$ est strictement croissante, alors $V = f(U)$ classe les paniers dans le *même ordre* : $U(X) \geq U(Y) \iff f(U(X)) \geq f(U(Y))$. On dit que $V$ est une *transformation monotone* de $U$.

*Exemples* (de $U = x_1 x_2$) : $V = 3U + 7$, $V = U^2$ (car $U \geq 0$), $V = \ln U$, $V = \sqrt{U}$. En revanche, $V = -U$ *inverse* le classement : ce n'est pas une transformation monotone croissante.

# L'utilité est **ordinale**

**Proposition (Invariance ordinale)**

*Si $U$ représente les préférences d'un consommateur, alors toute fonction $f(U)$ avec $f$ strictement croissante les représente aussi. Il n'y a pas de fonction d'utilité « la bonne ».*

- $U(A) = 50$ n'est pas « deux fois mieux » que $U(B) = 25$ : **seul l'ordre compte**.

# Courbes d'indifférence = courbes de niveau

**Outil mathématique : courbe de niveau**

Pour une fonction $U(x_1, x_2)$, la *courbe de niveau* $k$ est l'ensemble des points où $U$ vaut $k$ : $U(x_1, x_2) = k$. C'est exactement la logique d'une carte topographique : l'*altitude* est $U$ et les lignes tracées sont les points de même altitude. Pour $U = x_1 x_2$, la courbe de niveau $k$ est $x_2 = k/x_1$ (une hyperbole).

Par $(10; 5)$ : $x_2 = 50/x_1$. Toute transformation monotone de $U$ donne **les mêmes courbes** (étiquettes différentes).

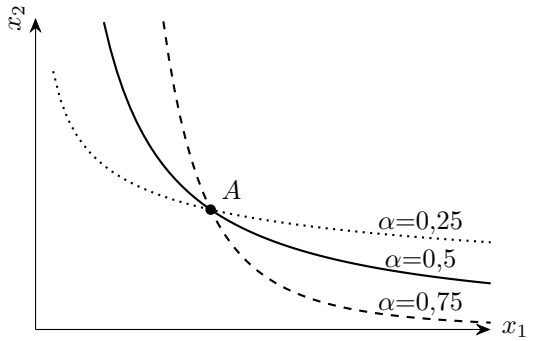
# Question

*Comment traduire par une formule « deux marques de lait identiques », « babouche gauche et droite », « le bien 1 compte plus que le 2 » ?*

# Fonctions d'utilité usuelles

| Préférences | $U$ | Courbes |
|---|---|---|
| Cobb-Douglas | $x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ | hyperboles convexes |
| Substituts parfaits | $ax_1 + bx_2$ | droites, pente $-a/b$ |
| Compléments parfaits | $\min\{ax_1, bx_2\}$ | « L » |
| Quasi-linéaire | $v(x_1) + x_2$ | translatées verticales |
| Bien 2 neutre | $x_1$ | verticales |
| Bien 2 nuisible | $x_1 - x_2$ | croissantes |

# Cobb-Douglas : le rôle de $\alpha$




$$U = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$$

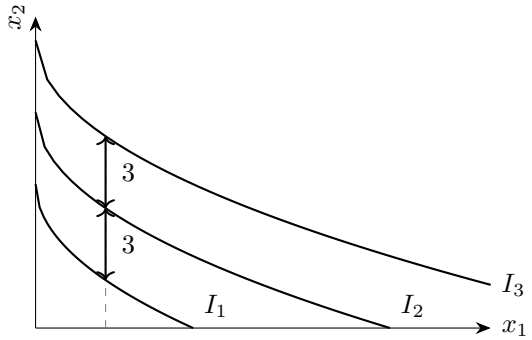
- $\alpha$ faible : courbe plate en $A$ : peu de poids au bien 1.
- $\alpha$ élevé : courbe raide : le bien 1 compte beaucoup.
- Au chap. 4 : $\alpha =$ **part du budget** dépensée en bien 1.

# Préférences quasi-linéaires

**Définition (Fonction quasi-linéaire)**

Une fonction d'utilité est *quasi-linéaire* si elle est de la forme $U(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$ : elle est linéaire dans un des biens (ici le bien 2) et non linéaire dans l'autre.

# Préférences quasi-linéaires




$U = 2\sqrt{x_1} + x_2$, soit
$x_2 = k - 2\sqrt{x_1}$

- Courbes **translatées verticalement** (écart $3$ entre $k = 6$ et $k = 9$).
- TMS $= 1/\sqrt{x_1}$ : ne dépend que de $x_1$.
- Bien 2 $\approx$ « monnaie » ; clé du surplus (chap. 8).

# Question

*La dixième tasse de thé apporte-t-elle autant de plaisir que la première ?*

# L'utilité marginale

**Définition (Utilité marginale)**

L'*utilité marginale* du bien 1, notée $U_{m1}$, est la variation de l'utilité provoquée par une petite variation de $x_1$, le bien 2 restant constant :

$$U_{m1}(x_1, x_2) = \frac{\partial U}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{U(x_1 + \Delta x_1, x_2) - U(x_1, x_2)}{\Delta x_1}.$$

De même $U_{m2} = \partial U / \partial x_2$.

Monotonie $\iff$ $U_{m1} > 0$, $U_{m2} > 0$.

# Outil mathématique : dérivées partielles

## Outil mathématique : dérivées partielles

Pour une fonction de plusieurs variables, la *dérivée partielle* par rapport à $x_1$ s'obtient en dérivant par rapport à $x_1$ en traitant $x_2$ comme une *constante*.
*Exemples.*

- $U = x_1 x_2$ : $\dfrac{\partial U}{\partial x_1} = x_2$ (car $x_2$ est une constante multiplicatrice) et $\dfrac{\partial U}{\partial x_2} = x_1$.
- $U = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$ : $\dfrac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{1}{2} x_1^{-1/2} x_2^{1/2}$.
- $U = 2\sqrt{x_1} + x_2$ : $\dfrac{\partial U}{\partial x_1} = \dfrac{1}{\sqrt{x_1}}$ et $\dfrac{\partial U}{\partial x_2} = 1$.

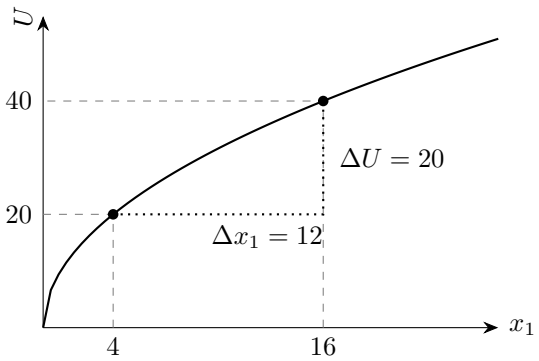
*Règles utiles* : $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(\ln x)' = 1/x$, $(uv)' = u'v + uv'$, $(f(u))' = f'(u)\,u'$.

# Utilité marginale décroissante

**Proposition (Loi de l'utilité marginale décroissante)**

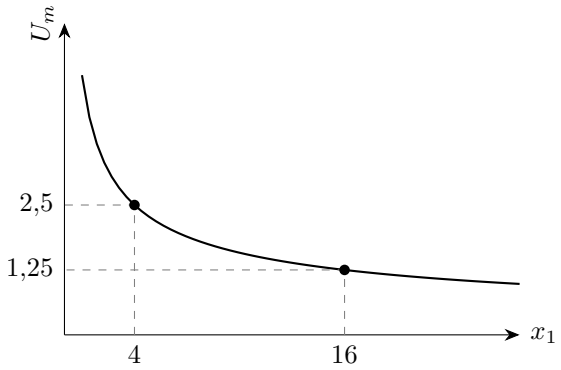
*Pour beaucoup de biens, l'utilité marginale décroît avec la quantité consommée : la première tasse de thé apporte plus que la dixième.*

# Utilité totale et utilité marginale (1/2)




$U = 10\sqrt{x_1}$ : croissante, **concave**. De $4$ à $16$ $(+12)$, $U$ ne gagne que $20$.

# Utilité totale et utilité marginale (2/2)




$U_m = 5/\sqrt{x_1}$ : **décroissante** (2,5 en $x_1 = 4$, 1,25 en $x_1 = 16$).

# Attention : utilité marginale $\neq$ convexité

- $U = x_1 x_2 : U_{m1} = x_2$ **ne décroît pas** avec $x_1$ — pourtant les préférences sont convexes.
- $V = \ln U = \ln x_1 + \ln x_2 : V_{m1} = 1/x_1$ **décroissante** — *mêmes* préférences.

**À retenir**

L'utilité marginale dépend de la représentation choisie ; le **TMS**, non.

# Question

*Pourquoi la pente d'une courbe d'indifférence est-elle égale à un rapport d'utilités marginales ?*

# Outil mathématique : différentielle totale

**Outil mathématique : différentielle totale**

Pour une fonction $U(x_1, x_2)$, la variation de $U$ due à de petites variations $\mathrm{d}x_1$ et $\mathrm{d}x_2$ est, au premier ordre,

$$\mathrm{d}U = \frac{\partial U}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2 = U_{m1}\,\mathrm{d}x_1 + U_{m2}\,\mathrm{d}x_2.$$

Chaque bien contribue à la variation de $U$ par (utilité marginale) $\times$ (variation de la quantité). Le long d'une courbe de niveau, $\mathrm{d}U = 0$.

$$U_{m1}\mathrm{d}x_1 + U_{m2}\mathrm{d}x_2 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = -\frac{U_{m1}}{U_{m2}}$$

# TMS et utilités marginales

**Proposition (TMS et utilités marginales)**

*Le taux marginal de substitution, valeur absolue de la pente de la courbe d'indifférence, vaut*

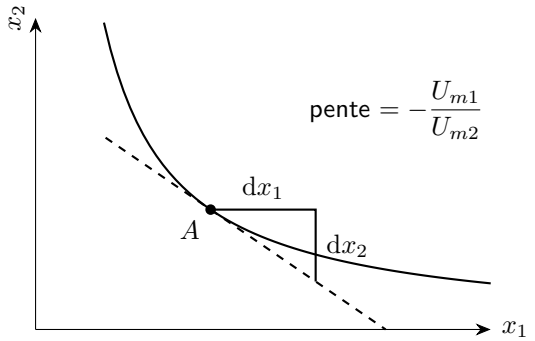
$$\mathrm{TMS} = \frac{U_{m1}}{U_{m2}}.$$

*Il est invariant par transformation monotone de $U$.*

**Justification de l'invariance.**

Si $V = f(U)$, alors $V_{m1} = f'(U)\,U_{m1}$ et $V_{m2} = f'(U)\,U_{m2}$ (dérivée d'une fonction composée). Le rapport $V_{m1}/V_{m2} = U_{m1}/U_{m2}$ : le facteur $f'(U) > 0$ se simplifie. □

# Lecture graphique




- Gain de $U$ : $U_{m1}\mathrm{d}x_1$ ; perte : $U_{m2}|\mathrm{d}x_2|$.
- Sur la courbe, les deux se compensent.
- TMS $=$ **valeur d'une unité de bien 1 en bien 2**.

# Le TMS de la fonction $x_1 x_2$

**Exemple (Le TMS de la fonction $x_1 x_2$)**

Pour $U = x_1 x_2$ : $U_{m1} = x_2$, $U_{m2} = x_1$, donc $\mathrm{TMS} = x_2/x_1$. Au point $A = (10\,;\,5)$, $\mathrm{TMS} = 5/10 = \frac{1}{2}$ : le consommateur accepte de renoncer à une demi-unité de bien 2 pour une unité supplémentaire de bien 1. Au point $(5\,;\,10)$, $\mathrm{TMS} = 10/5 = 2$ : c'est bien la valeur trouvée graphiquement au chapitre 2. Comme $x_2$ diminue et $x_1$ augmente le long de la courbe, le TMS *décroît* : les préférences sont convexes.

Cobb-Douglas : $\mathrm{TMS} = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\,\dfrac{x_2}{x_1}$.

# TMS des fonctions usuelles

| Préférences | TMS | |
|---|---|---|
| Cobb-Douglas | $\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x_2}{x_1}$ | décroît |
| Substituts $ax_1 + bx_2$ | $a/b$ | constant |
| Compléments | non défini au coin | $0$ ou $\infty$ |
| Quasi-linéaire $v(x_1) + x_2$ | $v'(x_1)$ | ne dépend que de $x_1$ |

# À retenir

- $U$ représente $\succsim$ si $X \succsim Y \iff U(X) \geq U(Y)$ ; utilité **ordinale**.
- Courbes d'indifférence = courbes de niveau ; transformation monotone $\Rightarrow$ mêmes préférences.
- $U_{mi} = \partial U / \partial x_i$ ; $\boxed{\text{TMS} = U_{m1}/U_{m2}}$, invariant.

# Question

*Au panier (10 ; 5), pente du budget* $= -\frac{1}{2}$ *et pente de l'indifférence* $= -\frac{1}{2}$*. Hasard ?*

$\rightarrow$ Chapitre 4 : équilibre et choix du consommateur